

■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ pro střední školy ■ ■ ■ ■

MATEMATIKA

V KOSTCE

Zdeněk Vošický



Zdeněk Vošický
Matematika v kostce pro střední školy

Text Zdeněk Vošický
Obrázky Pavel Kantorek
Obálka a grafická úprava Nakladatelství Fragment, s. r. o., Kamila Flonerová
Odborná korektura Miroslav Rozložník
Jazyková korektura Zita Peineltová
Odpovědná redaktorka Romana Homonická
Technická redaktorka Daruše Singerová
Vydalo nakladatelství Fragment, Humpolecká 1503, Havlíčkův Brod,
jako svou 1097. publikaci
1. vydání, 2007
Sazbu zhotovilo Nakladatelství Fragment, s. r. o.
Vytiskly Tiskárny Havlíčkův Brod, a. s.

Copyright © Fragment, 2007
Text © Zdeněk Vošický, 2007
Illustrations © Pavel Kantorek, 2007
Typo and cover © Nakladatelství Fragment, s. r. o., Kamila Flonerová, 2007

Učebnice/ odborná literatura/ středoškolská výuka/ opakování/ Edice Maturita v kostce

Všechna práva vyhrazena. Žádná část této publikace nesmí
být rozšiřována bez písemného souhlasu majitelů práv.

Kontaktní adresa: Radiová 1, 102 27 Praha 10 – Hostivař
e-mail: fragment@fragment.cz; <http://www.fragment.cz>

ISBN 978-80-253-0191-3 (1. vydání, 2007)

PŘEDMLUVA

„Matematika v kostce“ je přehledem základních poznatků středoškolské matematiky. Je vhodná pro nejširší okruh uživatelů, především je však určena studentům středních škol jako nepostradatelný pomocník při procvičování, opakování a prohlubování znalostí matematiky a při přípravě na různé typy zkoušek. Publikace nezastupuje a nenahrazuje učebnici, neboť je koncipována jako pracovní sešit s klíčem a testy, a je určena zejména pro domácí samostudium.

Učivo v tomto přehledu je rozděleno do deseti kapitol, které obsahově vycházejí z učebnic matematiky pro gymnázia a střední školy. Jednotlivé poznatky jsou podle vnějších hledisek shrnuty v celky tak, aby vynikly jejich typické vlastnosti. Na konci každé kapitoly jsou zařazeny příklady k procvičení učiva tematického celku a test, kterým lze prověřit úroveň matematických znalostí a dovedností z dané oblasti středoškolské matematiky. Na vypracování testu je určen časový limit třicet minut. Za každou chybnou odpověď i nezodpovězenou otázku je třeba k výslednému času připočítat deset minut. Hodnocení testu je dáno výsledným časem.

Celkový čas:	Výsledek:
do třiceti minut	výborný
od třiceti do pětáctyřiceti minut	dobrý
od pětáctyřiceti do padesáti minut	vyhovující
nad padesát minut	nevyhovující

Příprava této publikace byla náročná jak pro autora, tak pro celý realizační tým. Rád bych touto cestou poděkoval odpovědné a technické redaktorce, pracovníkům DTP studia, grafikům a jazykové korektorce za jejich vstřícnost a podporu, kterou mi poskytovali po celou dobu přípravných prací na knize. Vždy se s pochopením snažili zapracovat všechny připomínky, a často i velmi náročné úpravy, v průběhu redigování této publikace. Zvláštní poděkování patří ing. Miroslavu Rozložníkovi za jeho odbornou konzultaci a pečlivou kontrolu správnosti řešení příkladů a testů.

Autor

OBSAH

1. Úvod do teorie matematické logiky a teorie množin	8
1.1. Matematická logika	8
1.2. Kvantifikované výroky	10
1.3. Negování kvantifikovaných výroků	11
1.4. Logická výstavba matematiky	12
1.5. Množiny	15
2. Číselné množiny	23
2.1. Přirozená čísla	23
2.2. Celá čísla	25
2.3. Racionální čísla	26
2.4. Reálná čísla	27
2.5. Komplexní čísla	28
3. Mocniny, odmocniny, algebraické výrazy, algebraické rovnice a nerovnice	32
3.1. Mocniny a odmocniny	32
3.2. Algebraické výrazy	34
3.3. Úpravy algebraických výrazů	36
3.4. Rovnice a jejich řešení	37
3.5. Lineární rovnice	38
3.6. Kvadratická rovnice	39
3.7. Rovnice s neznámou v odmocněnci	40
3.8. Řešení rovnic s absolutní hodnotou	41
3.9. Soustava rovnic	42
3.10. Rovnice s parametrem	43
3.11. Algebraické rovnice vyšších stupňů	45
3.12. Nerovnice	47
4. Funkce	52
4.1. Zavedení pojmu funkce	52
4.2. Operace s funkcemi, základní vlastnosti funkcí	53
4.3. Polynomické funkce	56
Lineární funkce	56
Kvadratická funkce	57
4.4. Mocninné funkce	60
Mocninná funkce s přirozeným mocnitelem	60
Mocninná funkce se záporným celým mocnitelem	61
4.5. Lomená racionální funkce	62

4.6	Exponenciální a logaritmická funkce	63
	Exponenciální funkce	63
	Logaritmická funkce	64
	Logaritmická rovnice	66
	Exponenciální rovnice	68
	Exponenciální a logaritmické nerovnice	68
5.	Goniometrie	71
5.1	Velikost úhlů v míře obloukové a stupňové	71
5.2	Orientovaný úhel	72
5.3	Goniometrické funkce ostrého úhlu	73
5.4	Rozšíření definic goniometrických funkcí	75
5.5	Vlastnosti goniometrických funkcí	77
5.6	Grafické znázornění sinusových funkcí	78
5.7	Vztahy mezi goniometrickými funkcemi	79
	Vztahy mezi goniometrickými funkcemi doplňkových úhlů	79
	Vztahy mezi funkcemi stejného argumentu	79
	Součtové vzorce	80
	Vzorce pro dvojnásobek a polovinu argumentu	80
	Součty a rozdíly goniometrických funkcí	81
	Součiny goniometrických funkcí	81
5.8	Goniometrické rovnice	82
5.9	Trigonometrické řešení obecného trojúhelníku	84
6.	Elementární geometrie	89
6.1	Rozdělení geometrie, základní geometrické pojmy	89
6.2	Úhly	90
6.3	Trojúhelník	92
6.4	Čtyřúhelník	96
6.5	n-úhelník	98
6.6	Kružnice a kruh	98
	Mocnost bodu ke kružnici	100
6.7	Shodná geometrická zobrazení v rovině	100
6.8	Shodná zobrazení	100
	Příklady užití shodnosti	102
6.9	Podobnost a stejnolehlost	104
6.10	Stereometrie	109
6.11	Geometrická tělesa	111
7.	Analytická geometrie	116
7.1	Soustava souřadnic	116

7.2	Lineární útvary v rovině	122
7.3	Lineární útvary v prostoru	125
7.4	Kuželosečky	130
	Kružnice a kruh	131
	Elipsa	133
	Hyperbola	134
	Parabola	136
	Vzájemná poloha přímky a kuželosečky	138
	Vzájemná poloha dvou kuželoseček	141
7.5	Kvadratické útvary v prostoru	142
8.	Posloupnosti a řady	145
8.1	Posloupnosti	145
8.2	Aritmetická a geometrická posloupnost	146
8.3	Limita posloupnosti	148
8.4	Nekonečná řada a její součet	150
9.	Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika	154
9.1	Variace a permutace	154
9.2	Kombinace	155
9.3	Binomická věta	156
9.4	Rovnice a nerovnice s kombinačními čísly a faktoriály	157
9.5	Základy počtu pravděpodobnosti	158
9.6	Statistika	161
9.7	Charakteristika statistického souboru	163
9.8	Koeficient korelace	165
10.	Základy diferenciálního a integrálního počtu	168
10.1	Limita funkce, spojitost funkce	168
10.2	Derivace funkce	170
10.3	Věty o derivacích funkcí	171
10.4	Průběh funkce	172
10.5	Ukázky užití diferenciálního počtu	175
10.6	Neurčitý integrál	177
10.7	Určitý integrál	180
10.8	Aplikace určitého integrálu	180
	Klíč	185
	Rejstřík	192



1. Úvod do matematické logiky a teorie množin

1.1. MATEMATICKÁ LOGIKA

- Matematická logika se zabývá formálním studiem jazyka matematiky a matematických pracovních postupů. Základní význam mají v matematické logice **výroky**.

Výrokem je každá oznamovací věta, která srozumitelně sděluje něco, co může být jen pravdivé (pak pravdivostní hodnotu výroku označujeme číslem 1 nebo písmenem p – pravda), nebo nepravdivé (pravdivostní hodnota výroku je označena číslem 0 nebo písmenem n – nepravda).



- Např.** Sněžka je nejvyšší hora v Krkonoších. ...pravdivý výrok...1
Měsíc je celý z gumy. ...nepravdivý výrok...0
Bude pršet? ...není výrok (není to oznamovací věta)

- Jednoduché výroky** se označují velkými písmeny, např. A, B, ... V, ...

Např. A: Dnes prší. B: Venku je bláto. V: Číslo 12 není prvočíslo.

Negací výroku A je výrok, který má opačnou pravdivostní hodnotu než výrok A. Negaci výroku A označujeme $\neg A$ (popř. $\neg A$, $\sim A$, non A).

- | | | |
|--------------|--------------------|--|
| Např. | Výrok | Negace výroku |
| | A: Dnes prší. | $\neg A$: Není pravda, že dnes prší. |
| | B: Venku je bláto. | $\neg A$: Dnes neprší . |

- Složené výroky** jsou souvětí, vytvořená z jednoduchých výroků prostřednictvím spojek (v matematice zpravidla užíváme logické spojky: a; nebo; jestliže, pak; právě tehdy, když).

Konjunkce výroků A, B je složený výrok ve tvaru „A a B“, který se označuje $A \wedge B$.
Alternativa (disjunkce) výroků A, B je složený výrok ve tvaru „A nebo B“, který se označuje $A \vee B$.
Implikace výroků A, B je složený výrok tvaru „Jestliže A, pak B“ (z A vyplývá B), který se označuje $A \Rightarrow B$.
Ekvivalence výroků A, B je složený výrok ve tvaru „A právě tehdy, když B“ (A tehdy jen tehdy, když B), který označujeme $A \Leftrightarrow B$.

- Např.** A: Dnes prší. B: Venku je bláto.
 $A \wedge B$: Dnes prší **a** venku je bláto.
 $A \vee B$: Dnes prší **nebo** je venku bláto.

$A \Rightarrow B$: **Jestliže** dnes prší, **pak** je venku bláto.
 $A \Leftrightarrow B$: Dnes prší, **právě když** je venku bláto.

- Pravdivostní hodnoty složených výroků ukazují definiční tabulky:

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

- Poznámka: V praxi se užívají různé způsoby *označení* a *čtení* výroků:

Značka	Název nebo čtení
$A, B, \dots, p, q$	výroky
$\bar{A}$ (A' ; $\neg A$; $\sim A$; non A)	negace výroku A
$A \wedge B$ (A & B; $A \cdot B$; A et B)	konjunkce výroků (A a zároveň B, A i B)
$A \vee B$ (A + B; AvelB)	alternativa, disjunkce (A nebo B)
$A \Rightarrow B$ ($A \rightarrow B$)	implikace (z A plyne B; A implikuje B) <i>jestliže</i> platí A, <i>pak</i> platí i B
$A \Leftrightarrow B$ ($A \leftrightarrow B$)	ekvivalence (A platí <i>tehdy a jen tehdy</i> , <i>když</i> platí B; A platí <i>právě tehdy</i> , <i>když</i> platí B)

- Písmena A, B atd. označují libovolné výroky – jsou to **výrokové proměnné**. Z výrokových proměnných lze pomocí závorek a symbolů $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ podle logických pravidel sestavovat **výrokové formule**, jejichž pravdivostní hodnoty ověřujeme zpravidla pomocí tabulek. Výroková formule, která při všech hodnotách svých proměnných nabývá pravdivostní hodnoty pravda, se nazývá **tautologie**; nabývá-li vždy hodnoty nepravda nazývá se **kontradikce**.

Např. Ověřte, zda výroková formule je tautologií:

a) $(\bar{A} \Rightarrow B) \wedge (\bar{A} \vee B)$

Řešení: Do tabulky vypíšeme postupně A, B, $\bar{A}$ z definiční tabulky. Dále určíme pravdivostní hodnoty $\bar{A} \Rightarrow B$. Obdobně určíme pravdivostní hodnotu $A \vee B$ z definiční tabulky, pak její negaci $\overline{(A \vee B)}$ a na závěr ověříme konjunkci $(\bar{A} \Rightarrow B) \wedge (\bar{A} \vee B)$.

A	B	$\bar{A}$	$\bar{A} \Rightarrow B$	$A \vee B$	$\overline{(A \vee B)}$	$(\bar{A} \Rightarrow B) \wedge (\bar{A} \vee B)$
1	1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	1	0	0
0	0	1	0	0	1	0

Závěr: Výroková formule $(\bar{A} \Rightarrow B) \wedge (\bar{A} \vee B)$ **není tautologií** (je kontradikcí).

b) $(\bar{A} \vee B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)$

Řešení: Postupujeme obdobně: A, B, $\bar{A}$, $\bar{A} \vee B$, $A \Rightarrow B$, $(\bar{A} \vee B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)$. Vypíšeme do tabulky a určíme jejich pravdivostní hodnoty.

A	B	$\bar{A}$	$\bar{A} \vee B$	$A \Rightarrow B$	$(\bar{A} \vee B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)$
1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1

Závěr: Výroková formule $(\bar{A} \vee B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)$ je tautologií.

- Při určování pravdivostních hodnot složených výroků se často užívají tautologie zvané **de Morganova pravidla**:

$$\overline{(A \vee B)} \Leftrightarrow (\bar{A} \wedge \bar{B}) \quad \overline{(A \wedge B)} \Leftrightarrow (\bar{A} \vee \bar{B})$$

- V praxi se uplatňují další tautologie:

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned} (A \wedge B) &\Leftrightarrow (B \wedge A) \\ (A \vee B) &\Leftrightarrow (B \vee A) \end{aligned} \right\} \text{„komutativnost“ konjunkce a alternativy} \\
 & (A \wedge A) \Leftrightarrow A \\
 & (A \vee A) \Leftrightarrow A \\
 & \overline{\overline{A}} \Leftrightarrow A \quad \text{zákon negace negace} \\
 & (A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\overline{A} \vee B) \\
 & (A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\overline{B} \Rightarrow \overline{A}) \quad \text{ekvivalence implikace a její obměny} \\
 & \left. \begin{aligned} (A \wedge (B \wedge C)) &\Leftrightarrow ((A \wedge B) \wedge C) \\ (A \vee (B \vee C)) &\Leftrightarrow ((A \vee B) \vee C) \end{aligned} \right\} \text{„asociativnost“ konjunkce a alternativy} \\
 & \left. \begin{aligned} (A \wedge (B \vee C)) &\Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C)) \\ (A \vee (B \wedge C)) &\Leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C)) \end{aligned} \right\} \text{„distributivní zákony“}
 \end{aligned}$$

- Pomocí pravdivostních tabulek lze snadno odvodit vztahy pro **negování složených výroků**:

VÝROK

$A \vee B$ (Přijde Adam, nebo Božena.)

$A \Rightarrow B$ (Jestliže přijde Adam, přijde Božena.)

$A \Leftrightarrow B$ (Adam přijde právě tehdy, když přijde Božena.)

$A \wedge B$ (Přijde Adam a Božena.)

NEGACE VÝROKU

NEGACE VÝROKU

$\overline{A \wedge B}$ (Nepřijde Adam a nepřijde Božena.)

$\overline{A \vee B}$ (Adam přijde a Božena nepřijde.)

$\overline{(A \wedge B) \vee (A \vee B)}$ (Adam přijde a Božena nepřijde, nebo Adam nepřijde a Božena přijde.)

$\overline{\overline{A \vee B}}$ (Adam nepřijde, nebo Božena nepřijde.)

VÝROK

1.2. KVANTIFIKOVANÉ VÝROKY

Vyjadřování množství (počtu, kvanta) se nazývá **kvantifikace**. Slova nebo slovní spojení, která vyjadřují údaj o počtu objektů se nazývají **kvantifikátory**.

Kromě číslovek patří mezi kvantifikátory řada slov hovorového jazyka. **Všichni, každý, vždy, někdy, žádný, nic, nikdo, nijak** atd. Zkušenosti matematiků ukazují, že nejčastěji užíváme **obecný** a **existenční** kvantifikátor.

zapamatuj si

Obecný kvantifikátor $\forall$ vyjadřuje, že **každý** uvažovaný objekt (nebo **žádný**) má (nebo nemá) vlastnost, o kterou jde. Užívá se slov: **každý, žádný, všichni, libovolný, kterýkoliv...**

Existenční kvantifikátor $\exists$ vyjadřuje, že **některé** (alespoň jeden) objekty mají vlastnost, o kterou jde.

Užívá se slov: **alespoň jeden, někteří, lze nalézt, existuje ...**

Výroky obsahující kvantifikátory nazýváme **kvantifikované výroky**.



Např.

Zápis výroku:

$\forall n \in \mathbb{N}: n > 0$

$\exists x \in \mathbb{R}: 2|x$

Čteme:

Každé přirozené číslo n je větší než nula.

Existuje sudé reálné číslo x .

Např. Příklady výroků s obecným a existenčním kvantifikátorem a s udáním počtu:

- A: **Každý** čtverec je rovnoběžník.
 B: **Všechny** rovnostranné trojúhelníky jsou rovnoramenné.
 C: **Žádné** prvočíslo není záporné.
 D: **Nikdo** není dokonalý.
 E: **Existuje** sudé prvočíslo.
 F: **Existuje** čtyřúhelník, který má aspoň dvě strany stejně dlouhé.
 G: **Právě jedno** prvočíslo je sudé.
 H: Je-li čtyřúhelník čtverec nebo kosočtverec, pak má **aspoň tři** strany stejně dlouhé.
 I: V každém trojúhelníku je **nejvýše jeden** pravý úhel.
 J: Jestliže má přirozené číslo **méně než čtyři** dělitele, pak je to prvočíslo nebo jeho druhá mocnina.

1.3. NEGOVÁNÍ KVANTIFIKOVANÝCH VÝROKŮ

zapamatuj si

PRAVIDLO PRO NEGOVÁNÍ VÝROKŮ S KVANTIFIKÁTORY $\forall$, $\exists$.

- V negovaném kvantifikovaném výroku zaměníme kvantifikátor $\forall$ kvantifikátorem $\exists$ a naopak každý kvantifikátor $\exists$ kvantifikátorem $\forall$.
- Výrokovou formu v negovaném kvantifikovaném výroku nahradíme její negací:

VÝROK —————→ NEGACE VÝROKU	
Každý ... je ...	Existuje alespoň jeden ..., který není ...
Alespoň jeden ... je ...	Pro každý ... platí, že není ...
NEGACE VÝROKU ←———— VÝROK	



Např.

- | | |
|---|--|
| a) $\forall$: Každý trojúhelník je pravoúhlý.
$\nexists$: Existuje (alespoň jeden) trojúhelník, který není pravoúhlý.
$\nexists$: Alespoň jeden trojúhelník není pravoúhlý. | c) $\forall$: Nikdo není dokonalý.
$\nexists$: Aspoň jeden člověk je dokonalý. |
| b) $\forall$: Alespoň jedno prvočíslo je sudé.
$\nexists$: Pro každé prvočíslo platí , že není sudé.
$\nexists$: Každé prvočíslo je liché . | d) $\forall$: Žádné prvočíslo není záporné.
$\nexists$: Aspoň jedno prvočíslo je záporné. |

zapamatuj si

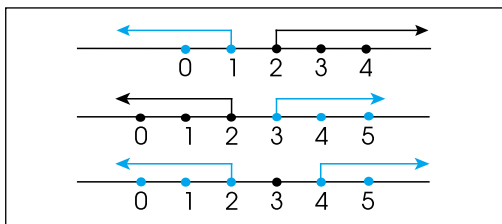
NEGOVÁNÍ DALŠÍCH VÝROKŮ S UDÁNÍM POČTU:

VÝROK →	NEGACE VÝROKU
Alespoň n ... je ...	Nejvýše $(n - 1)$ je ... ($n \geq 2$)
Nejvýše n ... je ...	Alespoň $(n + 1)$... je ... ($n \geq 1$)
Právě n ... je ...	Nejvýše $(n - 1)$... je ... nebo alespoň $(n + 1)$... je ... ($n \geq 2$)
NEGACE VÝROKU ←	VÝROK



Např.

- a) V: **Alespoň dva** vnitřní úhly trojúhelníka **jsou** pravé.
V: **Nejvýše jeden** vnitřní úhel trojúhelníka **je** pravý.
b) V: **Nejvýše dvě** čísla jsou kořenem rovnice $x^2 - 1 = 0$.
V: **Aspoň tři čísla** jsou kořenem rovnice $x^2 - 1 = 0$.
c) V: **Právě tři** studenti jsou pilní.
V: **Nejvýše dva** nebo **aspoň čtyři** studenti jsou pilní.



1.4. LOGICKÁ VÝSTAVBA MATEMATIKY

- Základem logické výstavby matematiky je soubor axiomů, tj. výchozích matematických výroků, které se považují za pravdivé a nedokazují se. Pomocí těchto axiomů (postulátů) se zavádějí základní matematické pojmy. Soustava axiomů musí být:
 1. **bezesporná** – nelze z ní vyvodit výrok a zároveň jeho negaci
 2. **nezávislá** – nelze vyvodit jeden axiom z ostatních axiomů
 3. **úplná** – ze soustavy axiomů je možné vyvodit pravdivost nebo nepravdivost libovolného matematického výroku, který není axiomem

- K zavedení dalších matematických pojmů slouží **DEFINICE**, které stanoví **název** nového pojmu a určí **jeho charakteristické vlastnosti** pomocí pojmů základních, popř. dříve zavedených.

Např.

Nekonečná posloupnost je funkce definovaná na množině všech přirozených čísel. (Tato definice zavádí nový pojem posloupnost pomocí dříve zavedeného pojmu funkce.)

- **MATEMATICKÁ VĚTA** je **pravdivý matematický výrok**, který je možné logicky odvodit z axiomů, definic a dříve dokázaných vět. Věty slouží k budování matematické teorie i k využití matematických poznatků v praxi.

- **Existenční věta** má tvar existenčního výroku $\exists x \in D: V(x)$ (Čti: „Existuje takové x patřící do D , že platí $V(x)$.“)

Např.

- Existuje rovnoramenný trojúhelník, který je rovnostranný.
- Existuje záporné reálné číslo, které je menší než -5 .
- Existuje čtyřúhelník, jehož úhlopříčky jsou stejně dlouhé.
- Existuje sudé prvočíslo.

- **Obecná věta** má tvar obecného výroku $\forall x \in D: V(x)$ (Čti: „Pro každé x patřící do D platí $V(x)$.“)

Např.

- V **každém** rovnoběžníku se úhlopříčky navzájem půlí.
- V **každém** trojúhelníku je nejvýše jeden úhel pravý.
- Žádné** prvočíslo není dělitelné čtyřmi.
- Všechny** mocniny přirozených čísel jsou nezáporné.



zapamatuj si

U obecné věty tvaru implikace $\forall x \in D: A(x) \Rightarrow B(x)$ nazýváme:

$A(x)$... *předpoklad (výchozísko) věty.*

$B(x)$... *závěr (tvrzení) věty.*

Aby věta platila, je platnost předpokladu $A(x)$ *postačující podmínkou* pro platnost závěru $B(x)$ a platnost $B(x)$ *nutnou podmínkou* pro platnost předpokladu $A(x)$ pro každé $x \in D$.

Např. Jestliže leží dva různé body v rovině, **pak** v této rovině leží i celá přímka těmito body určená.

předpoklad věty

závěr věty

zapamatuj si

■ Pro obecnou větu tvaru implikace zavádíme pojmy: **obrácená věta**, **obměněná věta**, **negovaná věta**.

Název	Symbolický zápis	Pravdivostní hodnota
Obecná věta	$\forall x \in \mathbf{D}: A(x) \Rightarrow B(x)$	
Obrácená věta	$\forall x \in \mathbf{D}: B(x) \Rightarrow A(x)$	Věta může, ale nemusí mít stejnou pravdivostní hodnotu jako původní tvrzení.
Obměněná věta	$\forall x \in \mathbf{D}: \bar{B}(x) \Rightarrow \bar{A}(x)$	Věta je ekvivalentní s větou původní, tzn. obě mají stejnou platnost.
Negovaná věta	$\exists x \in \mathbf{D}: A(x) \wedge \bar{B}(x)$	Věta neguje původní tvrzení.



Např.

a) **Věta:** Jestliže se úhlopříčky čtyřúhelníku půlí a má aspoň tři strany stejně dlouhé, pak je to čtverec nebo kosočtverec.

Obrácená věta: Jestliže je čtyřúhelník čtverec nebo kosočtverec, pak se jeho úhlopříčky půlí a má aspoň tři strany stejně dlouhé.

Obměněná věta: Jestliže čtyřúhelník není čtverec ani kosočtverec, pak se jeho úhlopříčky nepůlí nebo má nejvýš dvě strany stejně dlouhé.

Negovaná věta: Existuje čtyřúhelník, který má aspoň tři strany stejně dlouhé, jeho úhlopříčky se půlí a není to čtverec ani kosočtverec.

b) **Věta:** $\forall n \in \mathbf{N}: 2|n \Rightarrow 2|n^2$

Věta obrácená: $\forall n \in \mathbf{N}: 2|n^2 \Rightarrow 2|n$

Věta obměněná: $\forall n \in \mathbf{N}: 2 \nmid n^2 \Rightarrow 2 \nmid n$

Věta negovaná: $\exists n \in \mathbf{N}: 2|n \wedge 2 \nmid n^2$

■ Platí-li i věta obrácená, pak je můžeme společně vyjádřit jedinou obecnou větou ve tvaru ekvivalence: $\forall x \in \mathbf{D}: A(x) \Leftrightarrow B(x)$ (Čti: „Pro každé x patříci do $\mathbf{D}$ platí $A(x)$ tehdy a jen tehdy, platí-li $B(x)$ “.)

Např. K funkci f existuje funkce inverzní f^{-1} právě tehdy, když funkce f je prostá na definičním oboru $D(f)$.

Logický postup, kterým se ověřuje platnost matematické věty pomocí axiomů, definic a dříve dokázaných vět, se nazývá **DŮKAZ MATEMATICKÉ VĚTY**.

Podle použitých postupů rozlišujeme tyto typy důkazů:

① **PŘÍMÝ DŮKAZ** implikace $A \Rightarrow B$ se provádí pomocí řetězce pravdivých implikací.

$$A \Rightarrow A_1, A_1 \Rightarrow A_2, A_2 \Rightarrow A_3, \dots, A_n \Rightarrow B$$



Např. Větu $\forall n \in \mathbb{N}: 2|n \Rightarrow 2|n^2$ dokážeme přímo takto:

$$\forall n \in \mathbb{N}: 2|n \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}: n = 2k \Rightarrow n^2 = 4k^2 \Rightarrow n^2 = 2 \cdot 2k^2 \Rightarrow 2|n^2 \text{ c.b.d.}$$

Poznámka: $2|n$ znamená, že n je **sudé číslo**; $2 \nmid n$ znamená, že n je **liché číslo**.

② **NEPŘÍMÝ DŮKAZ** implikace $A \Rightarrow B$ provádíme jako *přímý* důkaz její obměny $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$, neboť obě jsou ekvivalentní.

Např. Větu $\forall n \in \mathbb{N}: 2|n^2 \Rightarrow 2|n$ dokážeme pomocí přímého důkazu její obměny $\forall n \in \mathbb{N}: 2 \nmid n \Rightarrow 2 \nmid n^2$.

$$\forall n \in \mathbb{N}: 2 \nmid n \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}: n = 2k + 1 \Rightarrow n^2 = (2k + 1)^2 \Rightarrow n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1 \Rightarrow n^2 = 2k' + 1 \Rightarrow 2 \nmid n^2. \text{ Platí věta obměněná, tzn. platí i věta původní.}$$

③ **DŮKAZ SPOREM** výroku V (např. $A \Rightarrow B$) se provádí tak, že se daný výrok V *neguje* a pomocí řetězce implikací se dospěje k logickému *sporu*. Ze sporu vyplývá, že negované tvrzení $\overline{V}$ neplatí, musí tedy platit původní výrok V .

Např. Větu $\forall n \in \mathbb{N}: 3|n \Rightarrow 3|n^2$ dokážeme sporem tak, že předpokládáme platnost její negace:

$$\exists n \in \mathbb{N}: 3|n \wedge 3 \nmid n^2 \text{ a pomocí řetězce implikací dospějeme k logickému sporu:}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}: 3|n \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}: n = 3k \Rightarrow n^2 = 9k^2 \Rightarrow n^2 = 3 \cdot 3k^2 \Rightarrow 3|n^2 \text{ **spor se závěrem negované věty } 3 \nmid n^2. \text{ Odtud plyne, že negace věty neplatí, tedy platí věta původní.}**$$

④ **DŮKAZ MATEMATICKOU INDUKCÍ** používáme u obecných vět typu $\forall n, n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0: V(n)$.

Důkaz spočívá ve dvou krocích a závěru.

I. krok: Dokážeme, že tvrzení platí pro nejmenší možné n , tedy že pro $n = n_0$ platí $V(n_0)$.
(Je-li to možné, volíme $n_0 = 1$).

II. krok: Z prvního kroku vyplývá, že existuje alespoň jedno takové $n = n_0$, že platí tvrzení $V(n)$ (indukční předpoklad). Z platnosti tvrzení $V(n)$ dokážeme tvrzení $V(n+1)$ tedy $V(n) \Rightarrow V(n+1)$.

Závěr: Podle prvního kroku platí $V(n_0)$. Podle druhého kroku z platnosti $V(n_0)$ vyplývá platnost $V(n_0 + 1)$. Opět podle druhého kroku z platnosti $V(n_0 + 1)$ vyplývá platnost $V(n_0 + 2)$ atd., tedy tvrzení $V(n)$ platí pro všechna $n \geq n_0$.

Např. Dokažte matematickou indukci: $\forall n \in \mathbb{N}: 31 | (5^{n+1} + 6^{2n-1})$

I. krok: Pro $n = 1$ je tvrzení správné, neboť

$$5^{1+1} + 6^{2 \cdot 1 - 1} = 25 + 6 = 31 \Rightarrow 31 | 5^2 + 6^1$$

II. krok: Za předpokladu, že existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že platí $31 | (5^{n+1} + 6^{2n-1})$ máme dokázat, že platí: $31 | 5^{(n+1)+1} + 6^{2(n+1)-1}$

$$\text{Pak: } 5^{n+2} + 6^{2n+1} = 5 \cdot 5^{n+1} + 36 \cdot 6^{2n-1} = 5 \cdot 5^{n+1} + 5 \cdot 6^{2n-1} + 31 \cdot 6^{2n-1} = 5(5^{n+1} + 6^{2n-1}) + 31 \cdot 6^{2n-1}$$

Tento výraz je dělitelný 31, neboť je součtem dvou čísel dělitelných 31.

Závěr: Jelikož podle I. kroku je daný výraz dělitelný číslem 31 pro $n = 1$, je podle II. kroku dělitelný číslem 31 pro $n = 2$ a opět podle II. kroku číslem $n = 3$ atd. Tedy věta platí pro každé přirozené číslo n .

■ Důkaz matematickou indukci se často užívá u řad a posloupností.

Např. Dokažte matematickou indukci: $\forall n \in \mathbb{N}: \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}$

I. krok: Pro $n = 1$ je tvrzení správné, neboť $\frac{1}{(3 \cdot 1 - 2)(3 \cdot 1 + 1)} = \frac{1}{1 \cdot 4}$

II. krok: Existuje alespoň jedno n takové, že platí:

$$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1} \quad (\text{Například pro } n = 1 \text{ z prvního kroku})$$

Máme ověřit, že platí:

$$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \frac{1}{[3(n+1)-2][3(n+1)+1]} = \frac{n+1}{3(n+1)+1}$$

Úpravou levé strany dostáváme:

$$\frac{n}{3n+1} + \frac{1}{(3n+1)(3n+4)} = \frac{3n^2 + 4n + 1}{(3n+1)(3n+4)} = \frac{(3n+1)(n+1)}{(3n+1)(3n+4)} = \frac{n+1}{3(n+1)+1}$$

Tím je druhý krok dokázán – tvrzení platí pro $n=1$, podle II. kroku pro $n=2$ a opět podle II. kroku pro $n=3$, atd., tedy pro každé přirozené číslo n .

Závěr: Platí $\forall n \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}$



zajímavost

Vyskytují se i úlohy, kdy je nejmenší možné $n > 1$:

Např. Dokažte matematickou indukci, že pro každé přirozené číslo $n > 2$ platí: $2^n > 2n + 1$.

I. krok: Pro $n = 3$ platí: $2^3 > 2 \cdot 3 + 1$

II. krok: Předpokládáme, že existuje n (např. $n = 3$), pro které platí $2^n > 2n + 1$.

Máme ověřit, že také platí: $2^{n+1} > 2(n+1) + 1$

Důkaz: $2^{n+1} = 2^n \cdot 2 > 2 \cdot (2n+1) > 2n+6 > 2n+3$, neboť $(2n+1) \cdot 2 = 2n+2(n+1)$

a pro $n \geq 3$ je $n+1 > 3$ a tedy $2(n+1) > 6$ c.b.d.

Závěr: Uvedená věta platí.

1.5. MNOŽINY

Zavedení pojmu množina

Množinou intuitivně rozumíme soubor libovolných, navzájem různých objektů, které mají určitou vlastnost V . Množina je určená, jestliže o každém objektu množiny – **prvku množiny** – lze jednoznačně rozhodnout, zda danou vlastnost V má, nebo nemá, tj. zda do uvažované množiny patří, nebo nepatří.

zapamatuj si

■ **K označování množin** užíváme zpravidla velká písmena latinské abecedy $A, B, \dots, M$, atd., **prvky** značíme malými písmeny $a, b, \dots$

■ Množina bývá nejčastěji **určena** jedním z těchto způsobů:

a) **Výčtem prvků**, tj. uvedením všech jejích prvků. To lze provést jen u množin s konečným počtem prvků.

Např. $A = \{2; 3; 4; 5\}; \quad B = \{b; c; d; e\}; \quad L = \{\text{smrk, dub, buk}\}$



b) *Charakteristickou vlastností V*, kterou mají jen prvky této množiny. Ověřování vlastnosti V provádíme v tzv. *základní množině U*, která obsahuje všechny objekty, které nás v dané situaci zajímají.

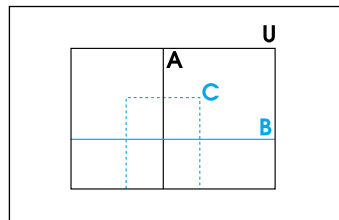
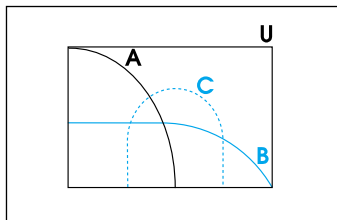
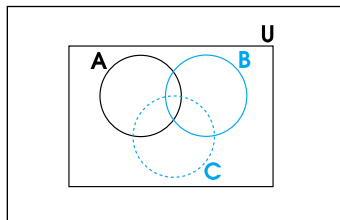
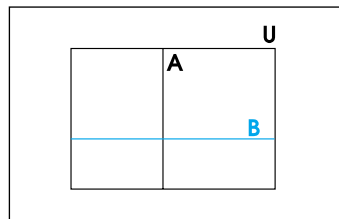
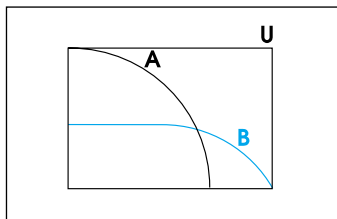
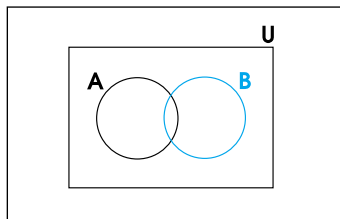
Např. $A = \{x \in U; V(x)\}$ i $A = \{x \in \mathbb{N}; x < 6\}$

- Graficky se množiny znázorňují pomocí tzv. **množinových diagramů**, z nichž nejznámější jsou tzv. *Vennovy diagramy*.
- Zápis $a \in A$ čteme: *a je prvkem (elementem) množiny A*
 $b \notin A$ čteme: *b není prvkem množiny A*

Např. $A = \{x \in \mathbb{N}; x < 6\} \Rightarrow 1 \in A, 7 \notin A$

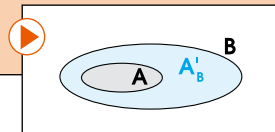
Poznámka:

V praxi se setkáváme často s následujícími Vennovými diagramy:

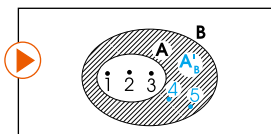


Existuje právě jedna množina, která neobsahuje žádný prvek a nazývá se **prázdná množina**; označuje se $\emptyset$, popř. $\{\}$.

Doplnek (komplement) množiny A v množině B tvoří všechny prvky, které patří do množiny B a nepatří do množiny A . Značíme A'_B .



Např.
a) $A = \{1; 2; 3\}$
 $B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ } $\Rightarrow A'_B = \{4; 5\}$

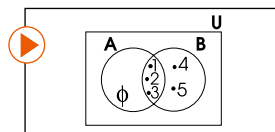


b) $A = \{\forall x \in \mathbb{N}; 4 < x < 7\} = \{5; 6\}$
 $B = \{\forall x \in \mathbb{N}; x \leq 10\} = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$ } $\Rightarrow A'_B = \{1; 2; 3; 4; 7; 8; 9; 10\}$

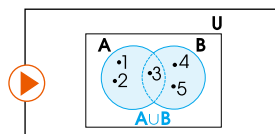
Označení a název	Definice	Vennův diagram
$A \subseteq B$ Inkluze množin A, B ; A je podmnožinou (částí) množiny B	$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x \in U; x \in A \Rightarrow x \in B)$ A je podmnožinou B , právě když každý prvek množiny A je zároveň prvkem množiny B .	
$A = B$ Rovnost množin A, B	$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$ Množiny A a B jsou si rovny, právě když $A \subseteq B$ a zároveň $B \subseteq A$, tzn. všechny prvky množin A, B jsou tytéž.	
$A \subset B$ Ostrá inkluze množin A, B	$A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge A \neq B)$ Množina A je podmnožinou množiny B . Množina A se nesmí rovnat množině B .	
$A \cup B$ Sjednocení množin A, B	$A \cup B = \{x \in U; x \in A \vee x \in B\}$ Sjednocením množin A, B je množina všech prvků ze základní množiny U , které patří alespoň do jedné z množin A a B .	
$A \cap B$ Průnik množin A, B	$A \cap B = \{x \in U; x \in A \wedge x \in B\}$ Průnikem množin A, B je množina všech prvků ze základní množiny U , které patří do A a zároveň do B .	
Rozdíl $A - B$, popř. $A \setminus B$ množin A, B	$A - B = \{x \in U; x \in A \wedge x \notin B\}$ Rozdíl množin A, B je množina všech prvků ze základní množiny U , které patří do množiny A a zároveň nepatří do množiny B .	

Např.

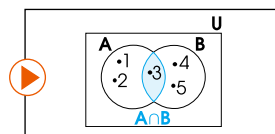
a) **Inkluze** $\left. \begin{array}{l} A = \{1; 2; 3\} \\ B = \{1; 2; 3; 4; 5\} \end{array} \right\} \Rightarrow A \subseteq B$ (Zde ostrá inkluze $A \subset B$)



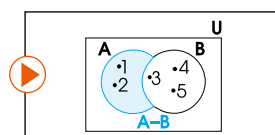
b) **Rovnost** $\left. \begin{array}{l} A = \{1; 2; 3\} \\ B = \{\forall n \in \mathbb{N}: n < 4\} \end{array} \right\} \Rightarrow A = B$ (Množiny **A** a **B** se rovnají, jsou pouze určeny každá jiným způsobem.)



c) **Sjednocení** $\left. \begin{array}{l} A = \{1; 2; 3\} \\ B = \{3; 4; 5\} \end{array} \right\} \Rightarrow A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$



d) **Průnik** $\left. \begin{array}{l} A = \{1; 2; 3\} \\ B = \{3; 4; 5\} \end{array} \right\} \Rightarrow A \cap B = \{3\}$



e) **Rozdíl** $\left. \begin{array}{l} A = \{1; 2; 3\} \\ B = \{3; 4; 5\} \end{array} \right\} \Rightarrow A - B = \{1; 2\}$

■ Pro vztahy mezi množinami a množinové operace platí:

$A = A$ reflexivnost rovnosti
 $A = B \Leftrightarrow B = A$ symetričnost rovnosti
 $A = B \wedge B = C \Rightarrow A = C$ tranzitivnost rovnosti

$A \subseteq A$ reflexivnost inkluze
 $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$ ekvivalence užívaná při důkazech rovnosti dvou množin
 $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$ tranzitivnost inkluze

$A \cup A = A$
 $A \cup B = B \cup A$ komutativnost sjednocení
 $A \cup \emptyset = A$
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ asociativnost sjednocení
 $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$

$A \cap A = A$
 $A \cap B = B \cap A$ komutativnost průniku
 $A \cap \emptyset = \emptyset$
 $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$ asociativnost průniku
 $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ distributivní zákony
 je-li $A \cap B = \emptyset$, říkáme, že množiny A, B jsou **disjunktní**

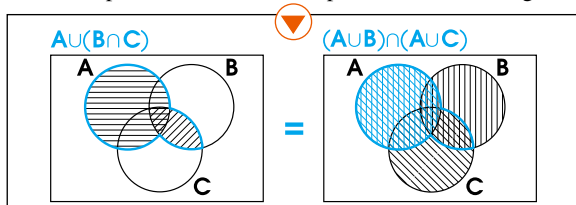
$A - A = \emptyset$
 $A - \emptyset = A$
 $\emptyset - A = \emptyset$
 $A - B \subseteq A$
 $A \neq B \Rightarrow A - B \neq B - A$ rozdíl množin není komutativní
 $A - B = \emptyset \Leftrightarrow A \subseteq B$

zavádíme také symetrický rozdíl množin $A \div B = (A - B) \cup (B - A)$

$A' \cap A = \emptyset$
 $(A \cup B)' = A' \cap B'$
 $(A \cap B)' = A' \cup B'$ de Morganova pravidla
 $A - B = A \cap B'$

Např. Pomocí Vennova diagramu ověřte, že platí distributivní zákon $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Řešení: Úlohy o rovnostech množin lze řešit pomocí Vennových diagramů tak, že znázorníme levou stranu rovnosti a pravou stranu rovnosti pomocí Vennova diagramu a výsledky porovnáme.



Závěr: Rovnost platí!

- Množina čísel s určitou vlastností, ve které jsou definovány bez omezení operace sčítání a násobení, se nazývá **číselný obor**. Používáme:

obor přirozených čísel (celých kladných): $\mathbf{N} = \{1; 2; 3; 4; 5; \dots\}$

obor nezáporných celých čísel: $\mathbf{N}_0 = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$

obor celých čísel: $\mathbf{Z} = \{\dots -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$

obor racionálních čísel: $\mathbf{Q}$

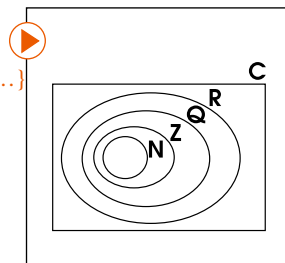
obor reálných čísel: $\mathbf{R}$

obor kladných reálných čísel: $\mathbf{R}^+$

obor nezáporných reálných čísel: $\mathbf{R}_0^+$

obor záporných reálných čísel: $\mathbf{R}^-$

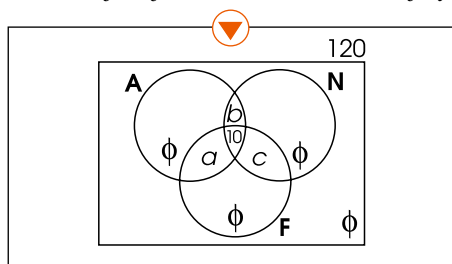
obor komplexních čísel: $\mathbf{C}$



- Platí inkluze: $\mathbf{N} \subset \mathbf{N}_0 \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$.

- Vennovy diagramy často užíváme k řešení slovních úloh.

Např. Účastníci kongresu mohou své příspěvky pronést v angličtině, němčině nebo francouzštině. Každý ze 120 účastníků kongresu ovládá alespoň dva tyto jazyky. 10 účastníků ovládá angličtinu, němčinu i francouzštinu. Jen anglicky i německy hovoří právě tolik účastníků, kolik ovládá angličtinu i francouzštinu, ale neumí německy. Němčinu i francouzštinu, ale bez angličtiny ovládá stejný počet účastníků jako je těch, kteří hovoří všemi jazyky. Kolik účastníků ovládá jednotlivé jazyky?



- Řešení:**
- 1) Vyznačíme jednotlivé množiny ve Vennově diagramu.
 - 2) Vyznačíme počty účastníků, které jsou známe (tj. každý ovládá alespoň dva jazyky, tedy množiny označující znalost jen jednoho, popř. žádného jazyka jsou **prázdné** a všechny jazyky ovládá **10 účastníků**.)
 - 3) Zbývající množiny označíme písmeny (a, b, c).
 - 4) Na základě textu zadání sestavíme soustavu rovnic, kterou vyřešíme:
 - (1) $b = a$ (Jen anglicky a německy hovoří právě tolik účastníků, kolik ovládá angličtinu i francouzštinu, ale neumí německy.)
 - (2) $c = 10$ (Němčinu i francouzštinu, ale bez angličtiny ovládá stejný počet účastníků jako je těch, kteří hovoří všemi jazyky.)
 - (3) $10 + a + b + c + d = 120$ (celkový počet účastníků)
 Odtud: $2a = 100 \Rightarrow a=50, b=50, c=10$.

Závěr: Anglicky umí 110 účastníků. $\dots (a + b + 10)$
 Německy hovoří 70 účastníků. $\dots (b + c + 10)$
 Francouzsky se domluví 70 účastníků. $\dots (a + c + 10)$

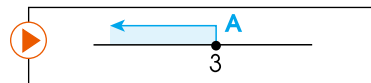
- Množina reálných čísel, jejichž obrazy na číselné ose vyplňují její souvislou podmnožinu se nazývá **interval**.
Druhy intervalů, jejich zápisy, názvy i znázornění na číselné ose uvádí tabulka:

Název intervalu	Zápis pomocí závorek	Zápis charakteristickou vlastností	Grafické znázornění
Uzavřený interval	$\langle a; b \rangle$	$a \leq x \leq b$	
Otevřený interval	$(a; b)$	$a < x < b$	
Polouzavřený (polootvřený interval)	$\langle a; b \rangle$	$a \leq x < b$	
	$(a; b \rangle$	$a < x \leq b$	
Neomezený interval	$\langle a; \infty \rangle$	$a \leq x < \infty$	
	$(a; \infty \rangle$	$a < x < \infty$	
	$(-\infty; a \rangle$	$-\infty < x \leq a$	
	$(-\infty; a \rangle$	$-\infty < x < a$	
Oboustranně neomezený interval	$(-\infty; \infty \rangle$	$x \in \mathbf{R}$	

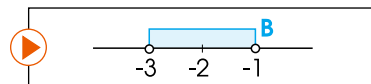
- Intervaly $\langle a; b \rangle$, $(a; b)$, $\langle a; b \rangle$, $(a; b \rangle$ se nazývají *ohraničené*, $\langle a; \infty \rangle$, $(a; \infty \rangle$, $(-\infty; a \rangle$, $(-\infty; a)$, $(-\infty; \infty \rangle$ *neohraničené*.
■ Jelikož jsou intervaly vlastně množiny čísel, lze s nimi provádět množinové operace.

Např. Pomocí intervalů vypište množinu:

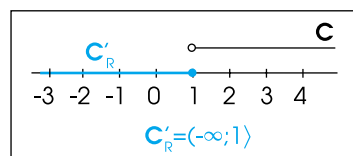
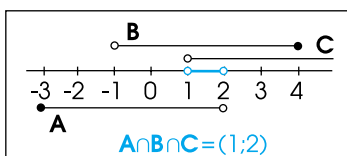
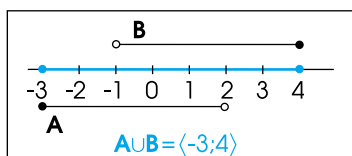
a) $A = \{ \forall x \in \mathbf{R}; x \leq 3 \}$ **Řešení:** $A = (-\infty; 3 \rangle$



b) $B = \{ \forall x \in \mathbf{R}; |x+2| < 1 \}$ **Řešení:** $B = (-3; -1)$

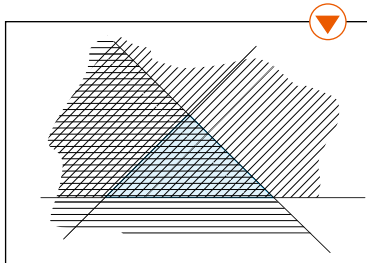


Např. Jsou dány množiny $A = (-3; 2)$ $B = (-1; 4 \rangle$ $C = \{ \forall x \in \mathbf{R}; x > 1 \}$ Určete $A \cup B$, $A \cap B \cap C$, C'_R .

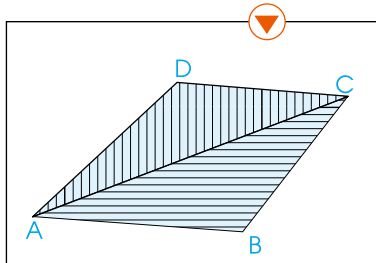


■ Pomocí množinových operací lze zavést geometrické obrazce, tělesa atd.

Např. a) $\triangle ABC = \rightarrow ABC \cap \rightarrow ACB \cap \rightarrow BCA$



b) $\square ABCD = \triangle ABC \cup \triangle ACD$



Cvičení 1

- 1.1. Negujte výroky:
 - a) A: Svítí slunce.
 - b) B: Každý žák je pilný.
 - c) C: Platí právě dvě tvrzení.
 - d) D: Všechna prvočísla jsou lichá.
 - e) E: Existuje alespoň jeden pravouhlý rovnoramenný trojúhelník.
- 1.2. Zapište slovy kvantifikované výroky:
 - a) $\forall n \in \mathbf{N}: n \geq 0$
 - b) $\forall n \in \mathbf{Z}: 2 \mid n \Rightarrow 2 \mid n^2$
 - c) $\exists x \in \mathbf{R}: \cos x = 1$
 - d) $\exists x \in \mathbf{C}: x^2 + 1 = 0$
- 1.3. K dané větě vyslovte větu obrácenou, obměněnou, negovanou a rozhodněte, která z vět vždy platí.
Věta: Je-li trojúhelník rovnostranný, pak je také rovnoramenný.
- 1.4. Vhodným způsobem dokažte, že platí:
 - a) $\forall n \in \mathbf{N}: 2 \nmid n \Rightarrow 16 \mid (n^4 - 1)$
 - b) $\forall n \in \mathbf{N}: 2 \nmid n^3 \Rightarrow 8 \nmid n$
 - c) $\forall m \in \mathbf{Z}: 2 \mid m \Rightarrow 2 \mid m^3$
- 1.5. Ověřte matematickou indukci, zda platí:
 - a) $\forall n \in \mathbf{N}: 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$
 - b) $\forall n \in \mathbf{N}: \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{4}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$
- 1.6. Zakreslete Vennův diagram pro podmnožiny A, B, C množiny U a zapište výčet prvků $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cap B \cap C$, $A' \cup B$, $B - A$, je-li:

$$U = \{x \in \mathbf{N}: x \leq 10\}$$

$$A = \{x \in U: 3 \mid x\}$$

$$B = \{x \in U: |x-2| < 5\}$$

$$C = \{x \in U: x^2 - 5x + 6 = 0\}$$
- 1.7. Dokažte, že platí:
 - a) $(A \cup B)' = A' \cap B'$
 - b) $(A \cap B)' = A' \cup B'$
 - c) $A - B = A \cap B'$
- 1.8. Z 29 sběratelů sbírá 12 odznaků, 3 jenom pohlednice. Těch, kteří sbírají odznaky i pohlednice je 6. Kolik sbírá odznaky, kolik pohlednice, kolik jenom odznaky a kolik ani odznaky, ani pohlednice?
- 1.9. Znázorněte na číselné ose a je-li to možné, zapište jako interval:
 - a) $A = \{x \in \mathbf{N}: n < 5\}$
 - b) $B = \{x \in \mathbf{R}: |x-2| < 3\}$
 - c) $\{x \in \mathbf{R}^+: x \leq 5\}$

Test 1

- 1.1. Negací výroku „Je-li číslo dělitelné šesti, pak je sudé“ je výrok:
- „Číslo je dělitelné šesti, není-li sudé.“
 - „Číslo není dělitelné šesti, není-li sudé.“
 - „Číslo není sudé, není-li dělitelné šesti.“
 - „Číslo je dělitelné šesti a není sudé.“
 - „Číslo není sudé, je-li dělitelné šesti.“
- 1.2. Symbolický zápis obměněné věty k větě „Třetí mocnina libovolného přirozeného sudého čísla je číslo sudé.“ Má tvar:
- $\forall n \in \mathbb{N}: 2 \mid n \Rightarrow 2 \mid n^3$
 - $\forall n \in \mathbb{N}: 2 \mid n \wedge 2 \nmid n^3$
 - $\exists n \in \mathbb{N}: 2 \nmid n \Rightarrow 2 \nmid n^3$
 - $\exists n \in \mathbb{N}: 2 \nmid n \wedge 2 \nmid n^3$
 - $\forall n \in \mathbb{N}: 2 \nmid n^3 \Rightarrow 2 \nmid n$
- 1.3. Rozhodněte, které z daných výroků jsou pravdivé:
- Každý rovnoramenný trojúhelník je rovnostanný.
 - Existuje rovnoramenný trojúhelník, který není rovnostanný.
 - Nejvýše tři prvočísla jsou jednociferná.
 - Žádné prvočíslu nekončí nulou.
 - Pro všechna celá čísla x je $\frac{x}{x} = 1$.
- 1.4. Alternativa dvou výroků má hodnotu nepravda, jestliže:
- oba výroky jsou pravdivé
 - jeden z výroků má opačnou pravdivostní hodnotu než druhý
 - oba výroky jsou nepravdivé
 - alespoň jeden z výroků je nepravdivý
 - vždy
- 1.5. Při důkazu sporem používáme větu:
- obrácenou
 - obměněnou
 - negovanou
 - původní
 - Pythagorovu
- 1.6. Zapište symbolicky větu: „Není-li druhá mocnina libovolného přirozeného čísla číslo sudé, pak není sudé ani toto přirozené číslo.“ Větu dokažte.
- 1.7. Pro množiny **A**, **B**, **C** platí distributivní zákon ve tvaru:
- $(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cap \mathbf{C} = (\mathbf{A} \cap \mathbf{C}) \cup (\mathbf{B} \cap \mathbf{C})$
 - $(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cap \mathbf{C} = (\mathbf{A} \cap \mathbf{C}) \cup (\mathbf{B} \cap \mathbf{C})$
 - $\mathbf{A} \cup (\mathbf{B} \cap \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cap (\mathbf{A} \cup \mathbf{C})$
 - $(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cup \mathbf{C} = (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cap \mathbf{C}$
 - $(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cup \mathbf{C}' = (\mathbf{A}' \cup \mathbf{B}') \cap \mathbf{C}$
- 1.8. Je dána množina $\mathbf{U} = \{\forall n \in \mathbb{N}: n \leq 8\}$ a množina $\mathbf{A} = \{\forall n \in \mathbb{N}: 2 \mid n \wedge |n| < 5\}$. Doplněk $\mathbf{A}'_{\mathbf{U}}$ je:
- $\{1; 2; 3; 4; 5\}$
 - $\{1; 3; 5; 6; 7; 8\}$
 - $\{1; 3; 5; 7; 8\}$
 - $\{1; 3; 5; 6; 7; 8\}$
- Vypište množiny $\mathbf{U}'$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}'_{\mathbf{U}}$ výčtem prvků.
- 1.9. Ze 30 studentů řeší každý alespoň jednu olympiádu. Jen MO neřeší žádný student. Těch, kteří MO i FO řeší současně, je dvakrát více než těch, kteří řeší jen FO. Počet řešitelů MO je:
- 10
 - 20
 - 30
 - nezjistitelný, neboť nejsou zadány potřebné údaje
- 1.10. **A** je množina všech sudých přirozených čísel **B** je množina všech přirozených čísel dělitelných třemi, **C** množina všech přirozených čísel dělitelných šesti. Pak platí:
- $\mathbf{A} \subset \mathbf{C}$
 - $\mathbf{B} \subset \mathbf{C}$
 - $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cup \mathbf{B}$
 - $\mathbf{C} \subset \mathbf{A}$
 - $\mathbf{C} \subset \mathbf{B}$
 - $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cap \mathbf{B}$

2. Číselné množiny

Z rozsáhlé teorie čísel se zaměříme na *rozšiřování číselných oborů*, způsoby *zápisů čísel* a základní vlastnosti čísel s důrazem na jejich *dělitelnost*.

2.1. PŘIROZENÁ ČÍSLA

Obor přirozených čísel $\mathbb{N}$ obsahuje čísla 1, 2, 3 ... *Přirozená čísla* udávají **počet prvků** v konečných neprázdných množinách, popř. **pořadí** prvků v uspořádaných n -ticích. Lze je zapisovat v *pozičních číselných soustavách* (desítkové, dvojkové, šestnáctkové atd.) nebo v *nepozičních číselných soustavách* (např. římská číselná soustava). V množině $\mathbb{N}$ je definováno **uspořádání**, **sčítání** a **násobení**.

zapamatuj si

- **Poziční číselné soustavy** o základu Z umožňují vyjádřit číslo a ve tvaru:

$$a = a_n \cdot Z^n + a_{n-1} \cdot Z^{n-1} + a_{n-2} \cdot Z^{n-2} + \dots + a_1 \cdot Z^1 + a_0 \cdot Z^0$$
- **Desítková (dekadická) poziční soustava** má $Z = 10$ a používá cifry (číslice) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Číslo a vyjadřuje ve tvaru

$$a = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0$$

tisíce
stovky
desítky
jednotky



Např. $(15\ 601)_{10} = 1 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$

rozvinutý zápis čísla v dekadické číselné soustavě



poznámka

Označení desítkové číselné soustavy se zpravidla vynechává: $(15\ 601)_{10} = 15\ 601$.

- **Dvojková (binární) poziční soustava** má základ $Z = 2$ a používá cifry 0, 1.
- **Šestnáctková (hexadecimální) poziční soustava** má základ $Z = 16$ a používá znaky 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F.

zajímavost

Vzájemné převody čísel z jednotlivých soustav:

$$(29)_{10} = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = (11101)_2$$

$$(29)_{10} = 1 \cdot 16^1 + 13 \cdot 16^0 = (1D)_{16}$$

$$(5A)_{16} = 5 \cdot 16^1 + 10 \cdot 16^0 = (90)_{10}$$

$$(1011)_2 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = (11)_{10}$$

Stručně (dělíme Z a píšeme zbytky)

29	:2		29	:16	
14	1		1	13(=D)	
7	0		0	1	
3	1				
1	1				
0	1				

↑

Číslo ve
dvojkové soustavě

↑

Číslo v šestnáctkové
soustavě

výsledek dělení

zbytek

výsledek dělení

zbytek



zapamatuj si

■ Římská číselná soustava užívá 7 znaků:

$I = 1, V = 5, X = 10, L = 50, C = 100, D = 500, M = 1000$ a čísla se v ní zapisují podle těchto pravidel:

- Čísla zapsaná stejnými znaky vedle sebe se sčítají (Např. $XX = 10 + 10 = 20$).
- Znaky I, X a C lze zapsat nejvýše třikrát bezprostředně za sebou, znaky V, L a D nejvýše jednou; znak M se může libovolněkrát opakovat.
- Je-li znak většího čísla zapsán za znakem menšího čísla, pak se od většího čísla odečítá číslo menší. Např. $CMXLIV = (1000 - 100) + (50 - 10) + (5 - 1) = 994$.
- Je-li znak menšího čísla zapsán za znakem většího čísla, pak se obě tato čísla sčítají (Např. $MCLXI = (1000 + 100) + (50 + 10) + 1 = 1161$).
- Pruh nad znakem znamená jeho násobení tisícem (Např. $\overline{X} = X \cdot 1000 = 10\,000$).



■ V praxi se setkáváme často s výjimkami (např. $IV = IIII$).

Např. $VIII = 8$ $XXXII = 32$ $XLVII = 47$ $MMCMCLXXIX = 1979$

Říkáme, že číslo a je **dělitelné** číslem b , právě když existuje takové *přirozené číslo* k , že platí $a = b \cdot k$ (pak b je **dělitelem** a a číslo a je **násobkem** b). Píšeme $b \mid a$ (pokud b nedělí a píšeme $b \nmid a$).

■ Používáme tato **kritéria dělitelnosti**: Přirozené číslo je dělitelné:

- právě tehdy, končí-li některou z cifer 0, 2, 4, 6, 8
- (resp. 9) právě tehdy, je-li jeho ciferný součet dělitelný 3 (resp. 9)
- (resp. 20, resp. 25, resp. 50) právě tehdy, je-li jeho poslední dvojčíslí dělitelné 4 (resp. 20, resp. 25, resp. 50),
- právě tehdy, končí-li číslicí 0 nebo 5
- (resp. 40, resp. 125, resp. 200, resp. 500) právě tehdy, je-li jeho poslední trojčíslí dělitelné 8 (resp. 40, resp. 125, resp. 200, resp. 500)
- právě tehdy, končí-li nulou
- právě tehdy, jestliže součet cifer lichých řádů je roven součtu cifer sudých řádů, popř. se tyto součty liší o násobek jedenácti

■ Je-li přirozené číslo dělitelné dvěma nesoudělnými čísly a, b , pak je dělitelné i jejich součinem.

Např. $3 \mid 228$ neboť $3 \mid (2 + 2 + 8)$

$11 \mid 4214573$ neboť $4 + \underline{1} + \underline{5} + \underline{3} = 2 + 4 + 7$

$3 \mid 228 \wedge 2 \mid 228 \Rightarrow 6 \mid 228$

$8 \mid 5168$ neboť $8 \mid 168$

Libovolné přirozené číslo $n > 1$, které je dělitelné jen 1 a sebou samým (tzv. samozřejmými děliteli), se nazývá **prvočíslo**. Nejmenší prvočíslo je 2, další např. 3, 5, 7, 11 ... Každé přirozené číslo, které má alespoň tři různé dělitele, se nazývá **složené číslo**.

■ Každé složené číslo $n > 1$ lze podle *Základní věty aritmetiky* jednoznačně rozložit v součin $n = p_1^{l_1} \cdot p_2^{l_2} \cdot \dots \cdot p_k^{l_k}$ (kde $p_1, p_2, \dots, p_k$ jsou vzájemně různá prvočísla a $l_1, l_2, \dots, l_k$ přirozená čísla). Pomocí této věty provádíme *rozklad složeného čísla na součin prvočísel*.

Např. $1800 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ $422037 = 3^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 29$ $42750 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 19$

Společným dělitelem přirozených čísel $n_1, n_2, \dots, n_k$ je každé přirozené číslo, jež je dělitelem každého z nich. Největší z těchto dělitelů se nazývá **největší společný dělitel** čísel $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$ a označuje se $D(n_1, n_2, n_3, \dots, n_k)$.

Např. Největší společný dělitel čísel se určuje pomocí prvočíselného rozkladu:

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } 422037 = 3^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 29 = \underline{3} \cdot \underline{3} \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 29 \\ 1800 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \underline{3} \cdot \underline{3} \cdot 5 \cdot 5 \end{array} \right\} D(1800, 422037) = \underline{3} \cdot \underline{3} = 9$$
$$\left. \begin{array}{l} \text{b) } 210 = \underline{2} \cdot \underline{3} \cdot \underline{5} \cdot 7 \\ 60 = \underline{2} \cdot 2 \cdot \underline{3} \cdot \underline{5} \end{array} \right\} D(60, 210) = \underline{2} \cdot \underline{3} \cdot \underline{5} = 30$$

- **Poznámka:** Často se užívá k určení největšího společného dělitele výpočetní technika, popř. se výpočet provádí pomocí upraveného **Euklidova algoritmu**.

Např. a) $D(840; 600) = 120$

b) $D(55; 88) = 11$

Výpočet:

	840	600		88	55
1) $840 - 600 = 240$	240	600	2) Sepíšeme menší číslo	33	55
3) Sepíšeme menší číslo	240	360	4) $600 - 240 = 360$	33	22
5) Sepíšeme menší číslo	240	120	6) $360 - 240 = 120$	11	22
8) $240 - 120 = 120$	120	120	7) Sepíšeme menší číslo	11	11

- Přirozená čísla, která mají alespoň jednoho společného dělitele $d > 1$ se nazývají **soudělná čísla**, nemají-li žádného společného dělitele $d > 1$, jsou to **čísla nesoudělná**.

Např. Čísla 12 a 36 jsou soudělná, 12 a 19 jsou čísla nesoudělná, neboť platí:

$$\left. \begin{array}{l} 12 = 2^2 \cdot 3 = \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{3} \\ 36 = 2^2 \cdot 3^2 = \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{3} \cdot \underline{3} \end{array} \right\} D(12, 36) = \underline{2} \cdot \underline{3} = 12 \qquad \left. \begin{array}{l} 12 = 2^2 \cdot 3 \\ 19 = 19 \cdot 1 \end{array} \right\} D(12, 19) = 1$$

Společným násobkem přirozených čísel $n_1, n_2, \dots, n_k$ je přirozené číslo, které je násobkem každého z nich. Nejmenší z těchto násobků se nazývá **nejmenší společný násobek** a označuje se $n(n_1, n_2, \dots, n_k)$.

Např. Nejmenší společný násobek čísel se určí pomocí prvočíselného rozkladu:

$$\left. \begin{array}{l} 422037 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 29 \\ 1800 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \end{array} \right\} n(422037, 1800) = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 84407400$$

- Obor **N** je uzavřený vzhledem k operaci sčítání a násobení (tzn. lze v něm provádět tyto operace bez omezení a jejich výsledkem je vždy přirozené číslo), není uzavřený vzhledem k operacím odečítání a dělení (tzn. výsledkem těchto operací nemusí být vždy přirozené číslo).

2.2. CELÁ ČÍSLA

- V oboru přirozených čísel nelze určit rozdíl $a - b$ pro případ, že $a < b$. Rozšíříme-li tento obor o nulu a čísla opačná k číslům přirozeným (tj. o $-1; -2; -3; \dots$), dostaneme **obor celých čísel $\mathbb{Z}$** , který je uzavřený také k operaci **odečítání** (tzn. odečteme-li od sebe dvě libovolná celá čísla, bude výsledkem vždy celé číslo). Pomocí celých čísel lze určit nejen **počty prvků**, ale také jejich **přírůstky**, **úbytky** apod.
- Každé celé číslo a lze jediným způsobem vyjádřit ve **zbytkovém tvaru**: $a = k \cdot b + z$, kde $k \in \mathbb{Z} \wedge 0 \leq z < |b|$. Číslo z se nazývá **zbytek** při dělení čísla a číslem b a číslo k **neúplný podíl**. Tento způsob zápisu se často používá např. při vyjadřování sudých a lichých čísel, v matematických důkazech a podobně.

Např. Číslo $a = 52$ dává po dělení číslem $b = 11$ zbytek 8, neboť $52 = 11 \cdot 4 + 8$.

Číslo $a = -85$ dává po dělení číslem $b = 7$ zbytek 6, neboť $-85 = -13 \cdot 7 + 6$.

Pro libovolnou dvojici celých čísel a, b , kde $b \neq 0$ říkáme, že číslo a je **dělitelné** číslem b (b je **dělitelem** a), existuje-li takové celé k , že platí $a = b \cdot k$. Číslo a je pak **násobkem** b . Píšeme $b|a$ (pokud b nedělí a píšeme $b \nmid a$). Celá čísla a, b jsou **nesoudělná**, jsou-li jejich společnými celočíselnými děliteli pouze čísla 1 a -1 .

Např. $-5 \mid 40$ neboť $40 = (-5) \cdot (-8)$ (čísla -5 a 40 jsou soudělná), ale $-5 \nmid 42$ (čísla -5 a 42 jsou nesoudělná).

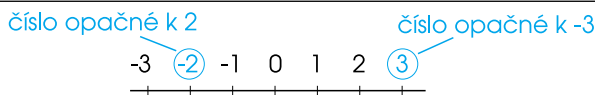
Každé celé číslo, které je dělitelné dvěma, se nazývá **sudé číslo**. Lze ho psát ve tvaru $a = 2k$ $\wedge k \in \mathbb{Z}$. Každé číslo, které není dělitelné dvěma, se nazývá **liché číslo** a lze ho vyjádřit jako $a = 2k + 1$ resp. $a = 2k - 1$, kde $k \in \mathbb{Z}$.

Např. Sudé číslo: $12 = 2 \cdot 6$, $-14 = 2 \cdot (-7)$

Liché číslo: $13 = 2 \cdot 6 + 1$, $13 = 2 \cdot 7 - 1$

Rozdílem celých čísel a, b (v tomto pořadí) se nazývá číslo d , pro které platí $a = b + d$. Píšeme $d = a - b$, kde a je **menšeneц**, b **menšitel**. Rozdíl $0 - a$ zapisujeme $(-a)$ a nazýváme ho **číslo opačné** k číslu a .

Např. $5 - 3 = 2$
menšeneц menšitel rozdíl



2.3. RACIONÁLNÍ ČÍSLA

- **Obor racionálních čísel $\mathbb{Q}$** je uzavřený nejen k operacím sčítání, odčítání a násobení, ale také vzhledem k **dělení** číslem různým od nuly.
- Racionální čísla se zapisují pomocí **zlomků**, popř. pomocí **desetinných čísel**. Umožňují určit nejen **počty prvků**, ale také **údaje o změnách a počtech dílů** určitého celku atd.
- Každé racionální číslo lze zapsat ve tvaru zlomku $\frac{p}{q}$, kde $p \in \mathbb{Z}$ je **čitatel zlomku**, $q \in \mathbb{Z} \wedge q \neq 0$ je **jmenovatel zlomku**.
- Zápis $\frac{p}{q}$ není jednoznačný, neboť **krácením** (tj. vydělením čitatele i jmenovatele zlomku číslem různým od nuly) nebo **rozšiřováním** (tj. vynásobením čitatele i jmenovatele zlomku číslem různým od nuly) lze získat nekonečně mnoho dalších zápisů stejného čísla.

Např. a) Zlomek $\frac{155}{300}$ lze krátit 5 a převést na základní tvar (tj. tvar, ve kterém je čitatel nesoudělný se jmenovatelem zlomku): $\frac{155}{300} = \frac{155:5}{300:5} = \frac{31}{60}$

b) Zlomek $\frac{7}{9}$ po rozšíření 5 dává: $\frac{7}{9} \cdot \frac{5}{5} = \frac{35}{45}$

Např. $\frac{1}{2} + \frac{3}{7} = \frac{1 \cdot 7}{2 \cdot 7} + \frac{3 \cdot 2}{7 \cdot 2} = \frac{13}{14}$

- Každé racionální číslo lze vyjádřit ve tvaru konečného nebo nekonečného periodického rozvoje a naopak.
- Jestliže ve zlomku $\frac{p}{q}$, který je v základním tvaru, platí $p = 2^r \cdot 5^s$, kde $r, s \in \mathbb{N}_0$, pak ho lze vyjádřit **konečným desetinným rozvojem** ve tvaru $\pm \left(n_0 + \frac{n_1}{10^1} + \frac{n_2}{10^2} + \dots + \frac{n_n}{10^n} \right)$, kde $n_0 \in \mathbb{N}_0$ a $n_i \in \mathbb{N}_0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), $0 \leq n_i \leq 9$.

Zkráceně tento rozvoj píšeme ve tvaru $\pm n_0, n_1 n_2 n_3 \dots n_n$.

desetinná čárka desetiny setiny tisíciny ...

Např. a) $\frac{5}{4} = 5 : 4 = 1,25 = 1 + \frac{2}{10} + \frac{5}{100}$

b) $-\frac{9}{250} = -0,036 = - \left(0 + \frac{0}{10} + \frac{3}{100} + \frac{6}{1000} \right)$

c) $-\frac{21}{5} = -4,2 = - \left(4 + \frac{2}{10} \right)$



zapamatuj si

V praxi používáme (za předpokladu, že zlomky mají čitatele různé od nuly):

rovnost zlomků $\frac{p}{q} = \frac{r}{s} \Leftrightarrow ps = rq$

Např. $\frac{3}{2} = \frac{6}{4}$, neboť $3 \cdot 4 = 2 \cdot 6$

rozšiřování zlomků $\frac{p}{q} = \frac{p \cdot k}{q \cdot k}$ zlomek byl rozšířen $k \neq 0$

Např. $\frac{5}{3} = \frac{5 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{10}{6}$

krácení zlomků $\frac{p}{q} = \frac{p : k}{q : k}$ (zlomek byl krácen $k \neq 0$)

Např. $\frac{16}{40} = \frac{16 : 8}{40 : 8} = \frac{2}{5}$

početní operace

sčítání: $\frac{p}{q} + \frac{r}{q} = \frac{p+r}{q}$

Např. $\frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{1+2}{5} = \frac{3}{5}$

$$\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps + rq}{qs}$$

Např. $\frac{1}{5} + \frac{2}{3} = \frac{1 \cdot 3 + 5 \cdot 2}{5 \cdot 3} = \frac{13}{15}$

odečítání: $\frac{p}{q} - \frac{r}{q} = \frac{p-r}{q}$

Např. $\frac{3}{5} - \frac{1}{5} = \frac{3-1}{5} = \frac{2}{5}$

$$\frac{p}{q} - \frac{r}{s} = \frac{ps - rq}{qs}$$

Např. $\frac{3}{5} - \frac{2}{3} = \frac{3 \cdot 3 - 2 \cdot 5}{5 \cdot 3} = -\frac{1}{15}$

násobení: $\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{pr}{qs}$

Např. $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{7} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 7} = \frac{6}{35}$

dělení: $\frac{p}{q} : \frac{r}{s} = \frac{ps}{qr}$

Např. $\frac{3}{5} : \frac{2}{7} = \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{2} = \frac{21}{10}$

složený zlomek

vedlejší zlomková čára $\rightarrow \frac{p}{q}$

hlavní zlomková čára $\rightarrow \frac{p}{q} : \frac{r}{s} = \frac{ps}{rq}$

vedlejší zlomková čára $\rightarrow \frac{r}{s}$

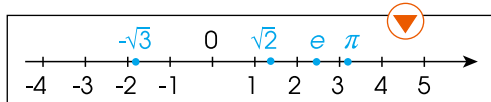
(Složený zlomek převedeme na jednoduchý tak, že součin vnějších členů p a s dělíme součinem vnitřních členů q a r).

- V nekonečném periodickém desetinném rozvoji tvaru $\pm n_0, n_1, n_2, n_3, \dots, n_n, \dots$, označujeme prvkem skupinu cifer, která se opakuje a nazýváme ji **periodou** desetinného rozvoje. Rozlišujeme **čísla ryze periodická** (Např. $1/3 = 0,3333 \dots = 0,\overline{3}$) a **neroze periodická** (Např. $43/6 = 7,1666 \dots = 7,1\overline{6}$).

2.4. REÁLNÁ ČÍSLA

- V oboru racionálních čísel nelze provádět bez omezení **odmocňování kladných čísel**. Neexistují zlomky, kterými bychom zapsali délku úhlopříčky čtverce jednotkové délky, hodnotu $\sin \frac{\pi}{3}$ atd. Proto byla zavedena čísla iracionální, která doplňují **čísla racionální** na **obor reálných čísel $\mathbb{R}$** .

Např. $\sqrt{2} = 1,41421 \dots$ $-\sqrt{3} = -1,73205 \dots$ $\pi = 3,1416 \dots$ $e \doteq 2,718281 \dots$ jsou neperiodická čísla.



- V reálném oboru $\mathbb{R}$ je každé reálné číslo znázorněno na číselné ose právě jedním bodem a naopak, každý bod číselné osy je obrazem právě jednoho reálného čísla. Vzdálenost obrazu reálného čísla a od počátku číselné osy udává **absolutní hodnotu reálného čísla $|a|$** , která je definována:

pro $a \geq 0$ je $|a| = a$, pro $a < 0$ je $|a| = -a$ (Vždy nezáporné číslo!) Např. $|-5| = -(-5) = 5$

Pro každé reálné číslo a platí: $|a| \geq 0$, $|-a| = |a|$, $|a| \geq a$, $|a| \geq -a$. Např. $|5| = 5$, $|-5| = |5|$

Pro každá dvě reálná čísla a, b : $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$, $|a + b| \leq |a| + |b|$, pro $b \neq 0$ je $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$.

- **Každé iracionální číslo je vyjádřeno nekonečným neperiodickým rozvojem.** V praxi určujeme iracionální číslo pomocí jeho **aproximace** (Např. $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$) **předpisem**, který umožní vypsát cifru na libovolném místě desetinného rozvoje (využívá se ve výpočetní technice), popř. pracujeme se **zaokrouhlenou hodnotou** reálného čísla nebo s **odmocninami**.

Zaokrouhlení čísla a na jednotky daného řádu k (nebo na určitý počet cifer) provádíme takto:

a) Všechny cifry nižších řádů vypustíme, pouze pro $|a| \notin \langle 0; 10 \rangle \wedge a \in \mathbb{Z}$ nahradíme vypuštěné číslice malými nulami – např. při $k = 3$ je $405327 \doteq 405000$.

b) Ostatní cifry ponecháme s případnou změnou podle *pravidel zaokrouhlování dle platné normy*.

Platí: Je-li první z vypuštěných cifer **menší než 5**, pak poslední ponechaná cifra se nemění.

(Např. $12,6\mathbf{2}3 \doteq 12,6$) – **zaokrouhlení dolů**.

Je-li první z vypuštěných cifer **větší než 5**, pak poslední ponechanou cifru zvětšíme o 1.

(Např. $12,\mathbf{6}83 \doteq 12,\mathbf{7}$) – **zaokrouhlení nahoru**.

- **Platnými ciframi** hodnoty přibližného čísla při zaokrouhlení na jednotky řádu k jsou všechny její cifry bez nul vlevo od první nenulové cifry a bez případných nul řádů menších než k (značeny malými nulami).

Např. Zaokrouhlené hodnoty $0,0\mathbf{405}$; $\mathbf{405}$; $\mathbf{40,5}$; $\mathbf{40500}$ mají tři platné cifry 4, 0, 5.

- Při počítání s reálnými čísly se v praxi užívá také **aproximace čísel**.

Např.

$$\begin{aligned} 3 < \pi < 4 \\ 3,1 < \pi < 3,2 \\ 3,14 < \pi < 3,15 \\ &\vdots \end{aligned}$$

2.5 KOMPLEXNÍ ČÍSLA

- V oboru reálných čísel nelze určit odmocninu ze záporného čísla, není tedy možné řešit např. kvadratickou rovnici se záporným diskriminantem, řadu algebraických rovnic atd. Tyto úlohy jsou řešitelné v oboru komplexních čísel $\mathbb{C}$.

Komplexním číslem a nazýváme uspořádanou dvojici reálných čísel a_1, a_2 (zapisujeme $a = (a_1; a_2)$), kde a_1 je *reálná část*, a_2 *imaginární část* komplexního čísla a .

- Množinu všech komplexních čísel lze vzájemně jednoznačně zobrazit na množinu bodů roviny, ve které je zavedena kartézská soustava souřadnic. Tato rovina se nazývá **rovina komplexních čísel** nebo **Gaussova rovina**. Osa x se v Gaussově rovině nazývá *osa reálných čísel* (*reálná osa*), osa y je osa ryze imaginárních čísel (*imaginární osa*).
- **Reálné číslo** je komplexní číslo, které má imaginární část rovnu nule. Je-li imaginární část od nuly různá, hovoříme o **imaginárním čísle**.
- **Absolutní hodnota** komplexního čísla $a = (a_1; a_2)$ vyjadřuje vzdálenost obrazu komplexního čísla od počátku Gaussovy roviny. Platí: $|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.
- **Komplexní jednotka** má absolutní hodnotu $|a| = 1$. Obrazy komplexních jednotek vyplní v Gaussově rovině jednotkovou kružnici se středem $O(0;0)$. Číslo $(0;1)$ se označuje **i** a nazývá se **imaginární jednotka**.

Např. $a = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ je komplexní jednotka, neboť $|a| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1$

Pro komplexní čísla $a = (a_1; a_2)$, $b = (b_1; b_2)$ definujeme:

rovnost dvou komplexních čísel	$(a_1; a_2) = (b_1; b_2) \Leftrightarrow a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2$
součet dvou komplexních čísel	$(a_1; a_2) \oplus (b_1; b_2) = (a_1 + b_1; a_2 + b_2)$
součin dvou komplexních čísel	$(a_1; a_2) \odot (b_1; b_2) = (a_1 b_1 - a_2 b_2; a_1 b_2 + a_2 b_1)$
podíl dvou komplexních čísel	$\frac{a}{b} = \left(\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{b_1^2 + b_2^2}; \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{b_1^2 + b_2^2} \right)$, kde $b \neq 0$

Např. $a = (2; 3)$ $b = (4; -5)$

Součet $a \oplus b = (2 + 4; 3 + (-5)) = (6; -2)$

Rozdíl $a \ominus b = (2 - 4; 3 - (-5)) = (-2; 8)$

Součin $a \odot b = (2 \cdot 4 - 3 \cdot (-5); 2 \cdot (-5) + 3 \cdot 4) = (23; 2)$

Podíl $\frac{a}{b} = \left(\frac{2 \cdot 4 + 3 \cdot (-5)}{4^2 + (-5)^2}; \frac{3 \cdot 4 - 2 \cdot (-5)}{4^2 + (-5)^2} \right) = \left(\frac{-7}{41}; \frac{22}{41} \right)$



zapamatuj si

■ Zavádíme tyto tvary komplexních čísel:

a) definiční tvar $a = (a_1; a_2)$

b) algebraický tvar $a = (a_1; a_2) = (a_1; 0) + (0; a_2) = (a_1; 0) + (a_2; 0) \cdot (0; 1) = a_1 + a_2 i$

c) goniometrický tvar $a = a_1 + a_2 i = |a| \cos \alpha + i \cdot |a| \sin \alpha = |a|(\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha)$, kde $\alpha \in \langle 0^\circ; 360^\circ \rangle$

(popř. $\alpha \in \langle 0; 2\pi \rangle$) je argument komplexního čísla a , pro který platí $\cos \alpha = \frac{a_1}{|a|} \wedge \sin \alpha = \frac{a_2}{|a|}$

Vyjde-li velikost orientovaného úhlu α při početních operacích s komplexními čísly větší než 360°

(resp. 2π), pak pracujeme pouze se základní velikostí tohoto úhlu.

Pro komplexní čísla $a = a_1 + a_2 i$, $b = b_1 + b_2 i$ definujeme:

opačné číslo k číslu a

$$-a = -a_1 - a_2 i$$

převrácené číslo k číslu a

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{a_1 + a_2 i}, \text{ kde } a \neq 0$$

číslo komplexně sdružené k číslu a

$$\bar{a} = a_1 - a_2 i$$

součet komplexních čísel

$$a \oplus b = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) i$$

rozdíl komplexních čísel

$$a \ominus b = (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) i$$

součin komplexních čísel

$$a \odot b = (a_1 b_1 - a_2 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$$

podíl komplexních čísel

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{b_1^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{b_1^2 + b_2^2} i, \text{ kde } b \neq 0$$

rovnost komplexních čísel

$$a = b \Leftrightarrow (a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2)$$

Např. Jsou dána komplexní čísla $a = 2 - i$, $b = 2 + i$, pak

a) $a \oplus b = (2 - i) + (2 + i) = 2 - i + 2 + i = 4$

b) $a \ominus b = (2 - i) - (2 + i) = 2 - i - 2 - i = -2i$

c) $a \odot b = (2 - i)(2 + i) = 4 - 2i + 2i - i^2 = 4 - i^2 = 4 - (-1) = 5$

d) $\frac{a}{b} = \frac{2-i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} = \frac{4-4i+i^2}{4+1} = \frac{3-4i}{5} = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$

e) $a^2 = (2 - i)^2 = 2^2 - 4i + i^2 = 3 - 4i$

Pro komplexní čísla $a = |a|(\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha)$, $b = |b|(\cos\beta + i \cdot \sin\beta)$, $n \in \mathbb{N}$ platí:

součin $a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot [\cos(\alpha + \beta) + i \cdot \sin(\alpha + \beta)]$

n -tá mocnina $a^n = |a|^n [\cos n\alpha + i \cdot \sin n\alpha]$... Moivreova věta

podíl $\frac{a}{b} = \frac{|a|}{|b|} [\cos(\alpha - \beta) + i \cdot \sin(\alpha - \beta)]$, kde $b \neq 0$

Např. $a = (-1; +1) = \sqrt{2} \cdot (\cos 3\pi/4 + i \sin 3\pi/4)$

$$b = -2i = 2(\cos 3\pi/2 + i \sin 3\pi/2)$$

$$a \odot b = |\sqrt{2} \cdot 2| \cdot [\cos(3\pi/4 + 3\pi/2) + i \sin(3\pi/4 + 3\pi/2)] = 2 \cdot \sqrt{2} (\cos 9\pi/4 + i \sin 9\pi/4) = 2\sqrt{2} (\cos \pi/4 + i \sin \pi/4)$$

$$\frac{a}{b} = \frac{|\sqrt{2}|}{|2|} [\cos(3\pi/4 - 3\pi/2) + i \sin(3\pi/4 - 3\pi/2)] = \frac{\sqrt{2}}{2} [\cos(-3\pi/4) + i \sin(-3\pi/4)] = \frac{1}{2} (\cos 5\pi/4 + i \sin 5\pi/4)$$

$$a^2 = (\sqrt{2})^2 \cdot (\cos 2 \cdot 3\pi/4 + i \sin 2 \cdot 3\pi/4) = 2(\cos 3\pi/2 + i \sin 3\pi/2)$$

Např. Pomocí Moivreovy věty vypočtěte a^5 , je-li $a = -1 - i$.

① Komplexní číslo převedeme na goniometrický tvar:

$$|a| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\left. \begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{a_2}{|a|} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos \alpha &= \frac{a_1}{|a|} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned} \right\} \text{III. kvadrant} \Rightarrow \alpha = \frac{5\pi}{4}$$

$$a = \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$$

② Mocninu určíme pomocí Moivreovy věty:

$$a^5 = \sqrt{2}^5 \left(\cos 5 \cdot \frac{5\pi}{4} + i \sin 5 \cdot \frac{5\pi}{4} \right) = 4\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = 4\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 4 + 4i$$

(Úlohu lze řešit také použitím vzorce $(A + B)^5 = A^5 + 5A^4B + 10A^3B^2 + 10A^2B^3 + 5AB^4 + B^5$)
 $a^5 = (-1 - i)^5 = (-1)^5 \cdot (1 + i)^5 = -(1 + i)^5 = -(1^5 + 5 \cdot 1^4 \cdot i + 10 \cdot 1^3 \cdot i^2 + 10 \cdot 1^2 \cdot i^3 + 5 \cdot 1 \cdot i^4 + i^5) =$
 $= -(1 + 5i - 10 - 10i + 5 + i) = -(-4 - 4i) = 4 + 4i$

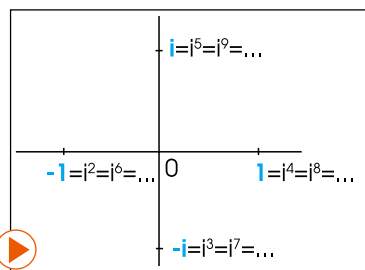
Např. Pomocí Moivreovy věty lze odvodit vztah pro **mocniny i** :

$$i = 1 \cdot (\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ) = i$$

$$i^2 = i \cdot i = 1 \cdot 1 \cdot [\cos(90^\circ + 90^\circ) + i \sin(90^\circ + 90^\circ)] = -1$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = 1 \cdot 1 \cdot [\cos(180^\circ + 90^\circ) + i \sin(180^\circ + 90^\circ)]$$

$$= -i \text{ atd.}$$



zapamatuj si

$$i^2 = -1$$



Pro nenulové komplexní číslo $a = |a|(\cos\alpha + i \sin\alpha)$, $n \in \mathbb{N}$ existuje právě n různých komplexních čísel, která jsou jeho **n -tou komplexní odmocninou**:

$$(\sqrt[n]{a})_c = z_k = \sqrt[n]{|a|} \cdot \left[\cos \left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) \right], \text{ kde } k = 0, 1, \dots, n-1$$

Např. Určete $(\sqrt{-1})_c$

$$(\sqrt{-1})_c = z_k = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{2}\right) \wedge k = 0; 1$$

$$\text{Tedy: } \left. \begin{aligned} z_0 &= \cos \frac{\pi}{2} + i \cdot \sin \frac{\pi}{2} = 0 + i = i \\ z_1 &= \cos \frac{3\pi}{2} + i \cdot \sin \frac{3\pi}{2} = 0 - i = -i \end{aligned} \right\} (\sqrt{-1})_c = \pm i$$

(Výsledkem jsou dvě opačná komplexní čísla, jejichž obrazy jsou v Gaussově rovině souměrné podle počátku 0.)

Cvičení 2

- 2.1. Zapište v desítkové soustavě ve zkráceném i rozvinutém tvaru:
a) $(568)_{10}$ b) $(1101)_2$ c) $(A5)_{16}$
- 2.2. Pomocí římských cifer zapište:
a) 2579 b) 1524 c) 4263
- 2.3. Vypočtěte:
a) D (15; 35) b) D (150; 200)
c) D (284; 524)
- 2.4. Vypočtěte:
a) $n(15; 20)$ b) $n(8; 60)$ c) $n(12; 280)$
- 2.5. Upravte na základní tvar, popř. vyjádřete jako smíšené číslo:
a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{30}{50}$
 $\frac{5}{7}$ $\frac{138}{240}$
- 2.6. Vyjádřete jako periodické číslo a pak zaokrouhlete na setiny:
a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{35}{6}$ c) $\frac{120}{11}$
- 2.7. Vyjádřete v algebraickém tvaru komplexní čísla:
a) $a = 5(\cos \frac{\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{\pi}{4})$
b) $b = \sqrt{2}(\cos \frac{3\pi}{2} + i \cdot \sin \frac{3\pi}{2})$
- 2.8. Převeďte na goniometrický tvar komplexní čísla:
a) $a = 5 + 5i$ b) $b = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$
Rozhodněte, zda se jedná o komplexní jednotku.
- 2.9. Vypočtěte:
a) $a \oplus b$ b) $a \ominus b$ c) $a \odot b$ d) $\frac{a}{b}$
je-li: $a = 3 + 4i$; $b = 2 - i$
- 2.10. Vypočtěte $(1 + i)^5$ a výsledek vyjádřete v algebraickém i goniometrickém tvaru.

Test 2

- 2.1. Zapište číslo 2979 pomocí římských číslic.
d) menší zlomek
e) vždy zlomek v základním tvaru.
- 2.2. Číslo je dělitelné 8:
a) končí-li cifrou 8
b) končí-li cifrou 4 nebo 2
c) je-li dělitelné současně 4 i 2
d) je-li jeho poslední trojčíslí dělitelné 8
- 2.3. Určete největšího společného dělitele a nejmenší společný násobek čísel 455 a 364.
- 2.4. Rozšířením zlomku získáme:
a) jiný tvar téhož čísla
b) stejný tvar jiného čísla
c) větší zlomek
- 2.5. Vyjádřete $\frac{17}{6}$ jako periodické číslo a výsledek zaokrouhlete na setiny.
- 2.6. Zapište v desítkové soustavě $(1011)_2$
- 2.7. Číslo opačné k číslu $\frac{1}{3}$ je:
a) $0,\overline{3}$ b) 3 c) $-\frac{1}{3}$ d) -3 e) $\frac{3}{1}$
- 2.8. Upravte složený zlomek na základní tvar a je-li to možné, vyjádřete ho pomocí $\frac{14}{51}$ smíšeného čísla:
 $\frac{84}{357}$

2.9. Jsou dána komplexní čísla $a = 3 + 4i$,
 $b = 4,2 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)$.

Pak platí:

- a) $a \oplus b = 3 + 8,2i$
- b) $a \oplus b = -1,2 + 0,2i$
- c) $a \ominus b = 3 + 8,2i$
- d) $a \odot b = 12,6 - 16,8i$
- e) $a \odot b = -16,8 - 12,6i$

2.10. Číslo $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right)^3$

- a) je komplexní jednotkou
- b) není komplexní jednotkou
- c) je větší než komplexní jednotka
- d) má v goniometrickém tvaru vyjádření
 $\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$
- e) žádná odpověď nevyhovuje

3. Mocniny, odmocniny, algebraické výrazy, algebraické rovnice a nerovnice

3.1. MOCNINY A ODMOCNINY

■ Mocniny s přirozeným exponentem

Pro libovolné reálné číslo a a pro každé přirozené číslo n je definována v množině reálných čísel

n -tá mocnina $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}_{n\text{-krát}}$.

a je **mocněnec (základ) mocniny**, n je **exponent (mocnitel)**, a^n je **mocnina**.

Např. $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$ $m^3 = m \cdot m \cdot m$

■ Mocniny s celočíselným exponentem

Pro každé reálné číslo $a \neq 0$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujeme: $a^0 = 1$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Např. $10^0 = 1$ $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{3 \cdot 3} = \frac{1}{9}$ $\frac{1}{5^{-2}} = 5^2 = 5 \cdot 5 = 25$ $\frac{m}{s^2} = m \cdot s^{-2}$ $\frac{J}{kg \cdot K} = J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$

■ Odmocniny

Ke každému nezápornému číslu a a ke každému přirozenému n existuje právě jedno nezáporné číslo x , pro něž platí $x^n = a$. Píšeme $x = \sqrt[n]{a}$, kde x je **n -tá odmocnina z čísla a** , a je **odmocněnec (základ odmocniny)**, n je **odmocnitel**.

Např. $3^2 = 9 \Rightarrow \sqrt[2]{9} = 3$ $2^5 = 32 \Rightarrow \sqrt[5]{32} = 2$

poznámka

- Je-li n liché přirozené číslo, pak je definována n -tá odmocnina i ze záporného reálného čísla: $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a} \wedge (a \geq 0)$.



Např. $(-2)^3 = -8 \Rightarrow \sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{|-8|} = -2$ $(-2)^5 = -32 \Rightarrow \sqrt[5]{-32} = -\sqrt[5]{|-32|} = -2$

zapamatuj si

Pravidla pro počítání s odmocninami

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \quad \text{pro } a \geq 0 \wedge b \geq 0$$

Odmocniny se stejnými odmocniteli **násobíme** tak, že součin základů odmocníme společným odmocnitelem.

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad \text{pro } a \geq 0 \wedge b > 0$$

Odmocniny se stejnými odmocniteli **dělíme** tak, že podíl základů odmocníme společným odmocnitelem.

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} \quad \text{pro } a \geq 0$$

Odmocninu **umocníme** tak, že umocníme základ a získanou mocninu odmocníme.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} \quad \text{pro } a \geq 0$$

Odmocninu **odmocníme** tak, že její základ odmocníme součinem odmocnitelů.

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[kn]{a^k} \quad \text{pro } a \geq 0 \wedge k \in \mathbb{N}$$



Např. a) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{15}$

b) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}} = \sqrt{\frac{2}{8}} = \frac{1}{2}$

c) $\sqrt[3]{\sqrt{32}} = \sqrt[6]{32}$

d) $(\sqrt[3]{5})^2 = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$

■ Pro $a > 0$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ lze odmocniny psát ve tvaru **mocniny s racionálním exponentem** $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$

Např. a) $\sqrt{3^2} = 3^{2/5}$

b) $\sqrt{a} = a^{1/2}$

c) $\sqrt[5]{\sqrt{32}} = ((2^5)^{1/2})^{1/5} = 2^{5/10} = 2^{1/2} = \sqrt{2}$

zapamatuj si

Pravidla pro počítání s odmocninami

Pro každé **reálné** r , s a každé $a > 0$, $b > 0$ (resp. pro každé **celé** r , s a každé **reálné** $a \neq 0$, $b \neq 0$) platí:

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s} \quad \text{Při násobení mocnin se stejným základem umocníme základ součtem exponentů.}$$

$$a^r : a^s = a^{r-s} \text{ pro } a \neq 0 \quad \text{Mocniny se stejným základem různým od nuly dělíme tak, že základ umocníme rozdílem exponentů dělence a dělitele.}$$

$$(a^r)^s = a^{rs} \quad \text{Mocninu umocníme tak, že její základ umocníme součinem exponentů.}$$

$$(ab)^r = a^r \cdot b^r \quad \text{Součin umocníme tak, že umocníme každého činitele.}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r} \text{ pro } b \neq 0 \quad \text{Podíl umocníme tak, že umocníme dělence i dělitele.}$$



Např. S využitím pravidel pro počítání s mocninami a odmocninami upravte:

a) $(2^2)^4 = (2^4)^2 = 16^2 = 256$

b) $\sqrt[3]{5^2} \cdot (\sqrt{5})^3 = 5^{2/3} \cdot 5^{3/2} = 5^{2/3+3/2} = 5^{-5/6} = \frac{1}{\sqrt[6]{5^5}}$

c) $(\sqrt[4]{16})^3 = \sqrt[4]{16^3} = \sqrt[4]{(2^4)^3} = \sqrt[4]{(2^3)^4} = 2^3 = 8$

d) $\sqrt[2]{\sqrt[5]{\sqrt[2]{\sqrt[5]{10}}}} = \sqrt[10]{\sqrt[10]{10}} = \sqrt[100]{10} = 10^{0,01}$

Např. Odstranění odmocnin ze jmenovatelů (**usměrňování zlomků**):

a) $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\frac{5}{1-\sqrt{2}} \cdot \frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{5+5\sqrt{2}}{1-2} = -5-5\sqrt{2}$

c) $\frac{2\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})-(\sqrt{3})} \cdot \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})+(\sqrt{3})} = \frac{2\sqrt{2}+4+2\sqrt{6}}{(1+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{2\sqrt{2}+4+2\sqrt{6}}{1+2\sqrt{2}+2-3} = \frac{2\sqrt{2}+4+2\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} =$
 $= \frac{4+4\sqrt{2}+2\sqrt{12}}{4} = \frac{4+4\sqrt{2}+4\sqrt{3}}{4} = 1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$

3.2. ALGEBRAICKÉ VÝRAZY

Algebraický výraz je zápis, který je správně vytvořený z matematických operačních znaků, čísel, proměnných, výsledků operací a hodnot funkcí. Neobsahuje-li algebraický výraz odmocniny, nazývá se **racionální algebraický výraz** (výraz s odmocninami se nazývá **iracionální**).

■ Často se setkáváme s racionálními celistvými výrazy – **mnohočleny (polynomy)**:

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, kde $n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$, $a_0, a_1, \dots, a_n$ jsou reálná čísla, x proměnná, n je **stupeň polynomu**, jednotliví sčítanci se nazývají **členy polynomu**.

Uspořádání mnohočlenu může být:

vzestupné: $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$

sestupné: $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

Např. $0,5 + 2x + 8x^2 + x^5 - 3x^7 + 3x^8$

Např. $3x^8 - 3x^7 + x^5 + 8x^2 + 2x + 0,5$

Např. Operace s mnohočleny ukazují příklady:

■ **sčítání** provedeme tak, že sečteme koeficienty u členů se stejnými exponenty:

$$(4x^3 + 3x^2 - 5x + 3) + (7x^2 - 2x - 1) = 4x^3 + 3x^2 + 7x^2 - 5x - 2x + 3 - 1 = 4x^3 + 10x^2 - 7x + 2$$

■ **odečítání** provedeme tak, že odstraníme závorky (v menšiteli změníme znaménka na opačná) a sečteme koeficienty u členů se stejnými exponenty:

$$(4x^3 + 3x^2 - 5x + 3) - (7x^2 - 2x - 1) = 4x^3 + 3x^2 - 5x + 3 - 7x^2 + 2x + 1 = 4x^3 + 3x^2 - 7x^2 - 5x + 2x + 3 + 1 = 4x^3 - 4x^2 - 3x + 4$$

■ **násobení** – členy násobíme dle schématu a pak sečteme:

$$(3x^2 + 2x - 1) \cdot (5x - 3) = \underline{15x^3 + 10x^2 - 5x} - \underline{9x^2 - 6x + 3} = 15x^3 + x^2 - 11x + 3$$

■ dělení

a) beze zbytku

$$(2x^4 - 3x^3 + x^2 - 3x - 1) : (x^2 + 1) = 2x^2 - 3x - 1$$

$$\begin{array}{r} (2x^4 - 3x^3 + x^2 - 3x - 1) \\ - (2x^4 + 2x^2) \\ \hline -3x^3 + x^2 - 3x - 1 \\ - (-3x^3 - 3x) \\ \hline -x^2 - 1 \\ - (x^2 + 1) \\ \hline 0 \end{array}$$

b) se zbytkem

$$(x^3 - 5x^2 + 5x - 2) : (x - 4) = x^2 - x + 1 + \frac{2}{x - 4}$$

$$\begin{array}{r} (x^3 - 5x^2 + 5x - 2) \\ - (x^3 - 4x^2) \\ \hline -x^2 + 5x - 2 \\ - (-x^2 + 4x) \\ \hline x - 2 \\ - (x - 4) \\ \hline 2 \text{ (zbytek)} \end{array}$$

Předpoklad: $x \neq 4$

Postup:

- ① Děleňce i dělitele uspořádáme sestupně.
- ② Vydělíme první člen děleňce prvním členem dělitele (dostaneme první člen podílu).
- ③ Vynásobíme tímto členem dělitele a výsledný polynom odečteme od děleňce a získáme děleňce pro další postup.
- ④ Opakujeme tento postup vždy s novým děleňcem tak dlouho, až je zbylý polynom nižšího stupně než dělitel.
- ⑤ Uvedeme předpoklady (dělitel musí být různý od nuly!).

■ **rozkłady**, tj. vyjádření mnohočlenu jako součin mnohočlenů nižšího stupně provádíme často některými z těchto způsobů:

a) využitím binomických vzorců

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

atd.

Např. a) $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 = (x - 1)(x - 1)$

b) $x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x - 3)(x + 3)$

c) $25x^2 - 16y^2 = (5x)^2 - (4y)^2 = (5x - 4y) \cdot (5x + 4y)$

d) $125a^3 - 27b^3 = (5a)^3 - (3b)^3 = (5a)^3 - (3b)^3 = (5a - 3b)(25a^2 + 15ab + 9b^2)$

b) rozkladem kvadratického trojčlenu v součin kořenových činitelů

Jsou-li x_1, x_2 kořeny kvadratického trojčlenu $ax^2 + bx + c \wedge a \neq 0$, resp. $x^2 + px + q$, pak platí:

$$ax^2 + bx + c = a(x + x_1)(x - x_2); \text{ resp. } x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2) \text{ kde } -p = x_1 + x_2 \wedge q = x_1 x_2$$

Např. a) $x^2 + 11x + 24 = (x + 8)(x + 3)$, neboť $-11 = -8 - 3$ $24 = (-8)(-3)$

b) $x^2 + 2x - 15 = (x - 3)(x + 5)$, neboť $-2 = +3 - 5$ $-15 = 3 \cdot (-5)$

c) $4x^2 + 8x - 21 = 4 \left(x^2 + 2x - \frac{21}{4} \right) = 4 \left[(x^2 + 2x) - \frac{21}{4} \right] = 4 \left[(x^2 + 2x + 1) - \frac{21}{4} - 1 \right] =$
 $= 4 \left[(x + 1)^2 - \frac{25}{4} \right] = 4 \left[(x + 1) + \frac{5}{2} \right] \cdot \left[(x + 1) - \frac{5}{2} \right] = 4 \left(x + \frac{7}{2} \right) \cdot \left(x - \frac{3}{2} \right) =$
 $= 2 \left(x + \frac{7}{2} \right) \cdot 2 \left(x - \frac{3}{2} \right) = (2x + 7)(2x - 3)$

3.3. ÚPRAVY ALGEBRAICKÝCH VÝRAZŮ

- Při úpravách výrazů využíváme poznatků o mocninách, odmocninách, zlomcích a mnohočlenech tak, abychom výraz převedli na co **nejjednodušší tvar**. Podmínky, které stanovují, kdy jsou výrazy definovány (např. základy mocnin nezáporné, jmenovatelé zlomků a dělitelé různé od nuly atd.), jsou nutnou **součástí řešení**.

Příklad úpravy racionálního výrazu:

$$\begin{aligned} \left[\frac{(2x+y)^2 - (y-3x)^2}{(a^2 - b^2)} \right] \cdot 4xy &= \left[\frac{(2x+y) + (y-3x)}{(a+b)(a-b)} \right] \cdot \left[\frac{(2x+y) - (y-3x)}{(a+b)(a-b)} \right] \cdot 4xy = \\ &= [2x - 3x + y + y][2x + 3x + y - y]4xy = (2y - x) \cdot 5x \cdot 4xy = \\ &= (2y - x) \cdot 20x^2y = \mathbf{40x^2y^2 - 20x^3y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Jinak: } \left[\frac{(2x+y)^2 - (y-3x)^2}{(a+b)^2 - (a-b)^2} \right] &= \left[\frac{4x^2 + 4xy + y^2 - (y^2 - 6xy + 9x^2)}{(a+b)^2 - (a-b)^2} \right] \cdot 4xy = \dots \\ &= (10xy - 5x^3)4xy = \mathbf{40x^2y^2 - 20x^3y} \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Příklad úpravy racionálního výrazu:

$$\frac{ab+1-b-a}{b+c-bc-1} = \frac{b(a-1)-(a-1)}{b-1-c(b-1)} = \frac{(b-1)(a-1)}{(b-1)(1-c)} = \frac{a-1}{1-c} \quad \text{Výraz má smysl (zlomek je definován) pro každé reálné číslo } a, b, c, \text{ kde } b \neq 1, c \neq 1.$$

Příklady úprav iracionálního lomeného výrazu:

$$\text{a) } \frac{x \cdot \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{2y\sqrt{x}} \right)^{-1} + y \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{2x\sqrt{y}} \right)^{-1}}{\frac{2xy}{x + \sqrt{xy}} + \frac{2xy}{y + \sqrt{xy}}} = \frac{\frac{2xy\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{2xy\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}}{\frac{2xy}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{y})} + \frac{2xy}{\sqrt{y}(\sqrt{x} + \sqrt{y})}} = \frac{\frac{2xy(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})}}{\frac{2xy(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})\sqrt{x}\sqrt{y}}} = \mathbf{\sqrt{xy}} \quad \text{pro } x > 0 \text{ a } y > 0$$

$$\text{b) } \frac{x^0}{x^{1/2} + y^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{x - y} = \frac{\mathbf{x^{1/2} - y^{1/2}}}{\mathbf{x - y}} \quad \text{pro } x > 0, y > 0 \text{ a } x \neq y$$

$$\text{c) } \frac{5\sqrt{x^4} \cdot y^{1/3} \cdot \sqrt{x^{-1}}}{x^{3/2} \cdot 4\sqrt{y^{-3}}} = \frac{x^{4/5} \cdot y^{1/3} \cdot x^{-1/2}}{x^{3/2} \cdot y^{-3/4}} = x^{4/5 - 1/2 - 3/2} \cdot y^{1/3 + 3/4} = x^{-6/5} y^{13/12} = \frac{\mathbf{y^{12}\sqrt{y}}}{\mathbf{x\sqrt{x}}} \quad \text{pro } x > 0, y > 0$$

Příklady úprav výrazů se složenými zlomky:

$$\text{a) } \frac{\frac{1+a}{1+a+a^2} - \frac{1-a}{1-a+a^2}}{\frac{1-a}{1-a+a^2} + \frac{1+a}{1+a+a^2}} = \frac{\frac{(1+a)(1-a+a^2) - (1-a)(1+a+a^2)}{(1+a+a^2)(1-a+a^2)}}{\frac{(1-a)(1-a+a^2) + (1+a)(1-a+a^2)}{(1-a+a^2)(1-a+a^2)}} =$$

$$\frac{1-a+a^2+a-a^2+a^3-(1+a+a^2-a-a^2-a^3)}{1-a+a^2-a-a^2-a^3+1-a+a^2+a-a^2+a^3} = \frac{2a^3}{2} = \mathbf{a^3} \quad \text{pro } a \in \mathbb{R}$$

$$\text{b) } \frac{\frac{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} - \sqrt{xy}}{x - y} + \frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{\frac{x\sqrt{x} + y\sqrt{y} - x\sqrt{y} - y\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}}{x - y} + \frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} =$$

$$= \frac{x(\sqrt{x} - \sqrt{y}) - y(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x - y)} + \frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(x - y)}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x - y)} + \frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y} + 2\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} =$$

$$= \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = 1 \quad \text{pro } x > 0, y > 0, x \neq y$$

Příklad úprav výrazu s absolutní hodnotou: Upravte výraz $A = \frac{a^3 + 2a^2 - a - 2}{(a^3 + 3a + 2)|a - 1|}$

① Stanovíme podmínky pro proměnnou a , aby měl daný výraz smysl. Jmenovatel zlomku musí být různý od nuly, tedy $(a^2 + 3a + 2 \neq 0 \wedge a - 1 \neq 0) \Rightarrow a \neq -2 \wedge a \neq -1 \wedge a \neq 1$

② Výraz upravíme: $A = \frac{a^3 + 2a^2 - a - 2}{(a^3 + 3a + 2)|a - 1|} = \frac{a^2(a + 2) - (a + 2)}{(a + 2)(a + 1)|a - 1|} = \frac{(a + 2)(a^2 - 1)}{(a + 2)(a + 1)|a - 1|} =$

$$= \frac{(a - 1)(a + 1)}{(a + 1)|a - 1|} = \frac{a - 1}{|a - 1|}$$

③ Na základě definice absolutní hodnoty budeme řešit úlohu pro:

$$a - 1 > 0 \Rightarrow |a - 1| = a - 1 \text{ a platí: } A = \frac{a - 1}{a - 1} = 1 \text{ pro } a \in (1; \infty)$$

$$a - 1 < 0 \Rightarrow |a - 1| = -a + 1 \text{ a platí: } A = \frac{a - 1}{-(a - 1)} = -1 \text{ pro } a \in (-\infty; -2) \cup (-2; -1) \cup (-1; 1)$$

④ Závěr: $A = -1$ pro $a \in (-\infty; -2) \cup (-2; -1) \cup (-1; 1)$
 $A = 1$ pro $a \in (1; \infty)$

3.4. ROVNICE A JEJICH ŘEŠENÍ

Nechť f a g jsou funkce proměnné x definované na množině $D \subset \mathbf{R}$. Úloha: Určete všechna $x \in D$, pro která platí $f(x) = g(x)$, se nazývá **rovnice o jedné neznámé x** .

- Množina D se nazývá **definiční obor rovnice**, $f(x)$ je **levá strana** rovnice, $g(x)$ **pravá strana**. **Řešením rovnice (kořenem)** je číslo x_0 , které po dosazení za x převede rovnici na pravdivou rovnost $f(x_0) = g(x_0)$.
- **Řešit rovnici** znamená určit množinu kořenů rovnice $K \subset D$. Postupujeme zpravidla tak, že provádíme úpravy, čímž získáme posloupnost rovnic, až dojdeme k rovnici, jejíž kořeny umíme určit. Provádíme-li pouze **ekvivalentní úpravy** (tj. **záměnu stran rovnice, přičtení funkce definované v D k oběma stranám rovnice, násobení obou stran rovnice nenulovým číslem**), pak má původní i nová rovnice stejný obor pravdivosti a zkouška není nutnou součástí řešení. Při použití **důsledkových úprav**, které nejsou ekvivalentní (např. umocnění, odmocnění rovnice) je nutné provést zkoušku (dosazením x zvlášť do levé strany rovnice a zvlášť do pravé strany rovnice a porovnáním výsledků).
- Při **grafickém řešení** rovnice $f(x) = g(x)$ sestrojíme grafy funkcí f a g . Hledaná řešení jsou určena souřadnicemi průsečíků těchto grafů. (Užíváme zejména tehdy, stačí-li určit přibližnou hodnotu kořenů, popř. jejich počet.)

3.5. LINEÁRNÍ ROVNICE

Lineární rovnice o jedné neznámé $x \in \mathbf{R}$ lze psát ve tvaru $ax + b = 0$, kde $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$. Má právě jeden kořen $x = -\frac{b}{a}$.

zapamatuj si

■ Obecně má rovnice $ax + b = 0$, kde $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$ tyto kořeny:

① pro $a \neq 0$

$$x = -\frac{b}{a}$$

(rovnice má právě jedno řešení)

$$K = \{-b/a\}$$

② pro $a = 0 \wedge b = 0$

$$x = t, \text{ kde } t \in \mathbf{R}$$

kořenem je každé reálné číslo

(rovnice má ∞ řešení)

$$K = \mathbf{R}$$

③ pro $a = 0 \wedge b \neq 0$

x neexistuje

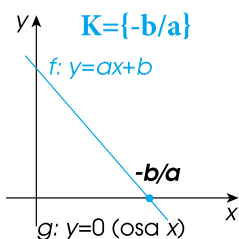
množina kořenů je $\emptyset$

(rovnice nemá řešení)

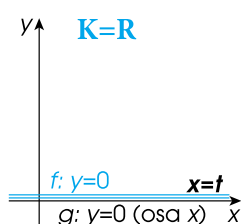
$$K = \emptyset$$

■ Graficky určíme kořeny lineární rovnice jako průsečíky přímky $f: y = ax + b$ s grafem funkce $g: y = 0$ (osa x).

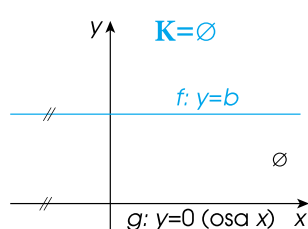
① pro $a \neq 0$



② pro $a = 0 \wedge b = 0$



③ pro $a = 0 \wedge b \neq 0$



Např. Řešte v $\mathbf{R}$ početně i graficky rovnici $2x - 1 = 0$.

a) numericky

$$2x - 1 = 0 \quad | +1$$

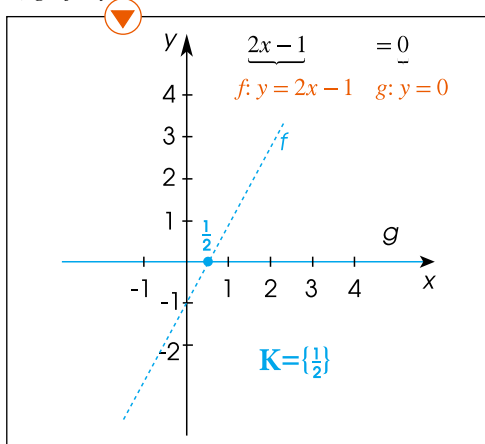
$$2x = 1 \quad | :2$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{Zk} \quad \left. \begin{array}{l} L\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} - 1 = 0 \\ P\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \end{array} \right\} L\left(\frac{1}{2}\right) = P\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$K = \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

b) graficky



3.6 KVADRATICKÁ ROVNICE

Kvadratickou rovnici o jedné neznámé $x \in \mathbb{C}$ ($x \in \mathbb{R}$) lze psát ve tvaru $ax^2 + bx + c = 0$, kde a, b, c jsou reálná čísla, $a \neq 0$. ax^2 je **kvadratický člen**, bx **lineární člen**, c **absolutní člen** kvadratické rovnice.

Např. Rovnice $ax^2 + c = 0$, $a \neq 0$ se nazývá **ryze kvadratická** a řeší se rozkladem:

a) $4x^2 - 9 = 0$

$$(2x - 3)(2x + 3) = 0$$

$$x_1 = 3/2 \quad x_2 = -3/2$$

$$K = \{-3/2; 3/2\}$$

b) $4x^2 + 9 = 0$

$$(2x - 3i)(2x + 3i) = 0$$

$$x_1 = 3i/2 \quad x_2 = -3i/2$$

$$K = \{-3i/2; 3i/2\}$$

nemá řešení v $\mathbb{R}$, je řešitelná v $\mathbb{C}$

Např. Rovnice $ax^2 + bx = 0$, $a \neq 0$ se nazývá **kvadratická rovnice bez absolutního členu**. Řeší se vytýkáním:

a) $5x^2 - 4x = 0$

$$x(5x - 4) = 0$$

$$\downarrow \quad \searrow$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 4/5$$

$$K = \{0; 4/5\}$$

b) $2x^2 + 3x = 0$

$$x(2x + 3) = 0$$

$$\downarrow \quad \searrow$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = -3/2$$

$$K = \{-3/2; 0\}$$

Např. Rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ je **úplná kvadratická rovnice**, jejíž počet řešení udává **diskriminant** $D = b^2 - 4ac$.

① Pro $D > 0$ má dva různé reálné kořeny $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

Např. $x^2 - 3x - 10 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{49}}{2} \begin{matrix} \nearrow 5 \\ \searrow -2 \end{matrix}$$

$$K = \{-2; 5\}$$

② Pro $D = 0$ má jeden dvojnásobný reálný kořen $x = -\frac{b}{2a}$

Např. $x^2 - 2x + 1 = 0$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{2} = 1$$

$$K = \{1\}$$

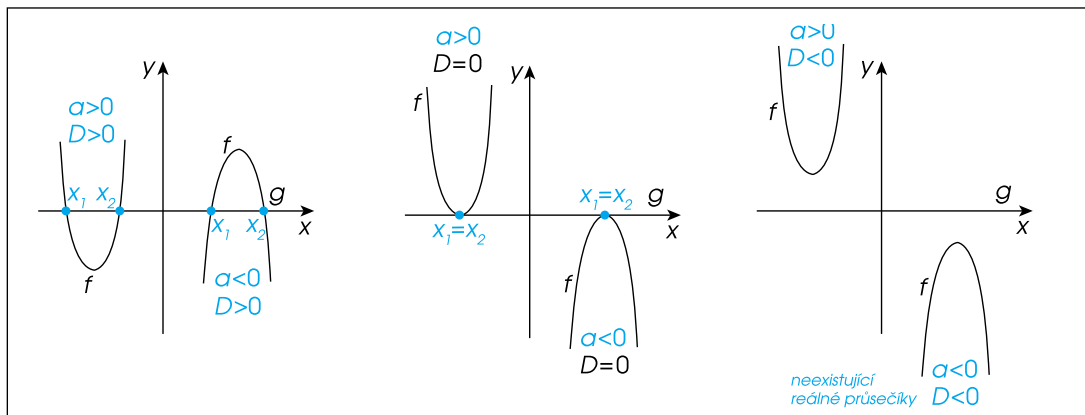
③ Pro $D < 0$ má dva komplexně sdružené kořeny (nemá reálné kořeny) $x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{|D|}}{2a}$

Např. $x^2 - 2x + 5 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = \frac{2 \pm i\sqrt{16}}{2} \begin{matrix} \nearrow 1 + 2i \\ \searrow 1 - 2i \end{matrix}$$

$$K = \{1 - 2i; 1 + 2i\}$$

- **Graficky** jsou kořeny kvadratické rovnice určeny průsečíky grafu kvadratické funkce $f: y = ax^2 + bx + c$ (parabola) s grafem funkce konstantní $g: y = 0$ (osa x):



■ **Poznámky:**

- ① Rovnici $ax^2 + bx + c = 0$, kde $a \neq 0$ lze vydělit a a převést na **normovaný tvar** $x^2 + px + q = 0$, přičemž pro její kořeny x_1, x_2 platí: $x_1 + x_2 = -p \wedge x_1 \cdot x_2 = q$.
- ② Také ryze kvadratickou rovnici i rovnici bez absolutního členu lze řešit pomocí vztahu $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.
- ③ Je-li *sudé* b , lze vztah $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ upravit na $x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}$.

Např. Rovnici $x^2 + 4x - 12 = 0$, která je v normovaném tvaru, lze řešit i

a) rozkladem: $(x - 2)(x + 6) = 0 \Rightarrow x_1 = 2 \wedge x_2 = -6$

$$K = \{-6; 2\}$$

b) vztahem pro *sudé* b : $x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 1 \cdot (-12)}}{1} = -2 \pm \sqrt{4 + 12} = \begin{cases} -6 \\ 2 \end{cases}$

$$K = \{-6; 2\}$$

3.7. ROVNICE S NEZNÁMOU V ODMOCNĚNCI

- **Rovnice s neznámou v odmocněnci** obsahují odmocniny z výrazů s neznámou. Odmocniny odstraňujeme *neekvivalentní úpravou* (umocněním), proto je zkouška *nezbytnou součástí* řešení těchto rovnic. Řešení typových úloh ukazuje příklad:

Např. Řešte v $\mathbf{R}$:

- $\sqrt{x-3} - 4 = 0$ osamostatníme odmocninu na jedné straně rovnice
- $\sqrt{x-3} = 4$ umocníme obě strany rovnice (neekvivalentní úprava)
- $x - 3 = 16$ dořešíme rovnici
- $x = 19$ provedeme zkoušku a zapíšeme výsledek

$$\left. \begin{array}{l} \textcircled{\text{Zk}} \quad l(19) = \sqrt{19-3} - 4 = \sqrt{16} - 4 = 0 \\ p(19) \quad \quad \quad = 0 \end{array} \right\} =$$

$$K = \{19\}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \sqrt{x+5} - \sqrt{x^2-7} &= 0 & \dots\dots\dots \text{rozložíme „symetricky“ odmocniny a dále} \\
 \sqrt{x+5} &= \sqrt{x^2-7} \quad /^2 & \text{postupujeme analogicky jako v případě a)} \\
 x+5 &= x^2-7 \\
 x^2-x-12 &= 0 & \textcircled{\text{Zk}} \quad \left. \begin{aligned} l(4) &= \sqrt{4+5} - \sqrt{16-7} = \sqrt{9} - \sqrt{9} = 0 \\ p(4) &= 0 \end{aligned} \right\} = \\
 x_{1,2} &= \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \begin{cases} 4 \\ -3 \end{cases} & \left. \begin{aligned} l(-3) &= \sqrt{-3+5} - \sqrt{9-7} = \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0 \\ p(-3) &= 0 \end{aligned} \right\} =
 \end{aligned}$$

K = {4; -3}

$$\begin{aligned}
 \text{c) } 2 + \sqrt{x-7} &= \sqrt{x+9} \quad /^2 & \dots\dots\dots \text{rovnici umocníme (levou stranu jako dvojčlen!)} \\
 4 + 4\sqrt{x-7} + x-7 &= x+9 & \dots\dots\dots \text{osamostatníme odmocninu a pokračujeme výše} \\
 4\sqrt{x-7} &= 12 & \text{uvedeným způsobem} \\
 \sqrt{x-7} &= 3 \quad /^2 & \textcircled{\text{Zk}} \quad \left. \begin{aligned} l(16) &= 2 + \sqrt{16-7} = 2 + \sqrt{9} = 5 \\ p(16) &= \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5 \end{aligned} \right\} = \\
 x-7 &= 9 \\
 x &= 16
 \end{aligned}$$

K = {16}

$$\begin{aligned}
 \text{d) } \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{x-2}} &= 2 \quad /^3 & \dots\dots\dots \text{rovnici umocníme} \\
 6 + \sqrt[3]{x-2} &= 8 & \dots\dots\dots \text{opět umocníme a upravíme} \\
 \sqrt[3]{x-2} &= 2 \quad /^3 \\
 x-2 &= 8 \\
 x &= 10 & \textcircled{\text{Zk}} \quad \left. \begin{aligned} l(10) &= \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{10-2}} = \sqrt[3]{6+2} = \sqrt[3]{8} = 2 \\ p(10) &= 2 \end{aligned} \right\} =
 \end{aligned}$$

K = {10}

3.8. ŘEŠENÍ ROVNIC S ABSOLUTNÍ HODNOTOU

■ Při řešení **rovníc s absolutní hodnotou** vycházíme z definice absolutní hodnoty. Řešení ukazuje příklad.

Např. Řešte v **R**: $|x+1| + |x-3| - 2|x| = 3$

početně: ① Anulováním výrazů v absolutních hodnotách dostaneme „kritické body“, pomocí kterých rozdělíme číselnou osu na jednotlivé intervaly.

$$x+1=0 \Rightarrow P_1 = -1 \quad x-3=0 \Rightarrow P_2 = 3 \quad x=0 \Rightarrow P_3 = 0$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 P_1 = -1 & & P_3 = 0 & & P_2 = 3 & & \\
 \hline
 I_1 = (-\infty; -1) & I_2 = \langle -1; 0 \rangle & I_3 = \langle 0; 3 \rangle & I_4 = \langle 3; \infty \rangle
 \end{array}$$

② Na základě definice absolutní hodnoty odstraníme absolutní hodnoty v jednotlivých intervalech a rovnice vyřešíme.

$$I_1 = (-\infty; -1): \quad -x - 1 - x + 3 + 2x = 3 \Rightarrow -1 = 0 \Rightarrow \text{spor} \Rightarrow K_1 = \emptyset$$

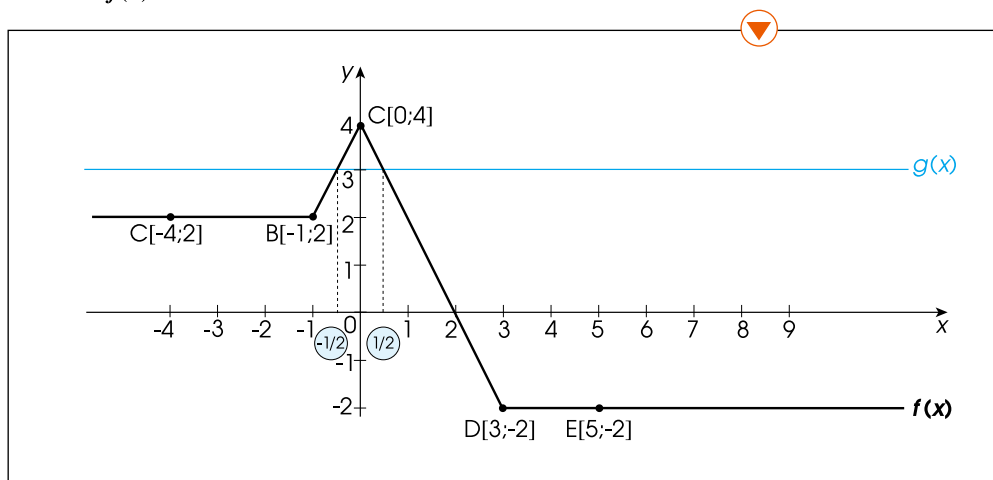
$$I_2 = \langle -1; 0): \quad x + 1 - x + 3 + 2x = 3 \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow K_2 = \{-1/2\}$$

$$I_3 = \langle 0; 3): \quad x + 1 - x + 3 - 2x = 3 \Rightarrow -2x = -1 \Rightarrow K_3 = \{1/2\}$$

$$I_4 = \langle 3; \infty): \quad x + 1 + x - 3 - 2x = 3 \Rightarrow 0 = 6 \Rightarrow \text{spor} \Rightarrow K_4 = \emptyset$$

③ Jednotlivá řešení sjednotíme a dostaneme výsledek: $K = K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4 = \{-1/2; 1/2\}$.

graficky: $\underbrace{|x+1| + |x-3| - 2|x|}_{f(x)} = \underbrace{3}_{g(x)}$



① Sestrojíme graf funkce $f(x) = |x+1| + |x-3| - 2|x|$:

a) Pomocí kritických bodů P_1, P_2

určíme body $B[P_1; f(P_1)] = [-1; 2]$, $D[P_2; f(P_2)] = [3; -2]$, $C[P_3; f(P_3)] = [0; 4]$.

b) V krajních intervalech I_1 a I_4 zvolíme body např. $P_4 = 4 \in I_1$ a $P_5 = 5 \in I_4$

a určíme $A[P_4; f(P_4)] = [-4; 2]$, $E[P_5; f(P_5)] = [5; -2]$.

c) Graf dostaneme spojením bodů A, B, C, D, E (viz obr.).

② Sestrojíme graf funkce $g(x) = 3$.

③ Určíme průsečíky těchto grafů (pokud existují). V případě, že průsečíky neexistují, je řešením prázdná množina. Kořeny rovnice jsou určeny x -ovými souřadnicemi průsečíků grafů: $K = \{-1/2; 1/2\}$.

3.9. SOUSTAVA ROVNIC

■ Několik rovnic o dvou a více neznámých, které mají být splněny současně, tvoří **soustavu rovnic**. Řešením soustavy rovnic je průnik řešení jednotlivých rovnic. Soustavu řešíme metodou sčítací nebo dosazovací, popř. dalšími postupy (např. pomocí maticového počtu atd.).

Např. V $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ lze řešit soustavu rovnic $x + y = -3 \wedge y - 2x = 6$

a) *metodou dosazovací (substituční)*

(1) $x + y = -3$ dosadíme za y

(2) $y - 2x = 6 \Rightarrow y = 2x + 6$ (2')

(1') $x + 2x + 6 = -3$

$3x = -9 \quad / :3$

$x = -3$

(2') $y = 2(-3) + 6$

$y = 0$

dosadíme za x

(Zk) $l_1([-3; 0]) = -3 + 0 = -3$

$p_1([-3; 0]) = -3$

$l_2([-3; 0]) = 0 - 2(-3) = 6$

$p_2([-3; 0]) = 6$

K = $\{[-3; 0]\}$

b) *metodou sčítací (eliminační)*

(1) $x + y = -3 \quad / \cdot 2$

(2) $-2x + y = 6 \quad / (-1)$

(1') $2x + 2y = -6$

(2') $-2x + y = 6$

$0x + 3y = 0 \Rightarrow y = 0$

(1'') $x + y = -3$

(2'') $2x - y = 6$

$3x + 0y = -9 \Rightarrow x = -3$

..... rovnice vhodně upravíme a sečteme tak, abychom vyloučili jednu neznámou

..... vyloučení x

(Zk) viz a)

..... vyloučení y

K = $\{[-3; 0]\}$

■ **Poznámka:** Geometricky se jedná o určení souřadnic průsečíku přímek v O_{xy} .

Např. Řešte v $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ soustavu rovnic $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5 \wedge \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 13$.

K řešení uijeme substituci $\frac{1}{x} = u \wedge \frac{1}{y} = v$. Pak

(1) $u + v = 5 \Rightarrow u = 5 - v \Rightarrow u^2 = 25 - 10v + v^2$

(2) $u^2 + v^2 = 13$

Dosazením u^2 do druhé rovnice dostaneme:

(2) $(5 - v)^2 + v^2 = 13 \Rightarrow 25 - 10v + v^2 + v^2 - 13 = 0 \Rightarrow 2v^2 - 10v + 12 = 0$

Odtud: $v_1 = 3 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{3}$ a $u_1 = 2 \Rightarrow y_1 = \frac{1}{2}$ tedy **K₁ = $\{[1/3; 1/2]\}$**

$v_2 = 2 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}$ a $u_2 = 3 \Rightarrow y_2 = \frac{1}{3}$ tedy **K₂ = $\{[1/2; 1/3]\}$**

Závěr: **K = K₁ $\cup$ K₂ = $\{[1/3; 1/2]; [1/2; 1/3]\}$**

3.10. ROVNICE S PARAMETREM

■ **Rovnice s parametrem** obsahuje kromě neznámých další proměnné, kterým se říká **parametry**. Je to zápis množiny všech rovnic, které bychom získali dosazením všech hodnot, jichž mohou parametry nabývat. Řešení rovnic s parametry spočívá v určení jejich kořenů v závislosti na přípustných hodnotách parametrů.

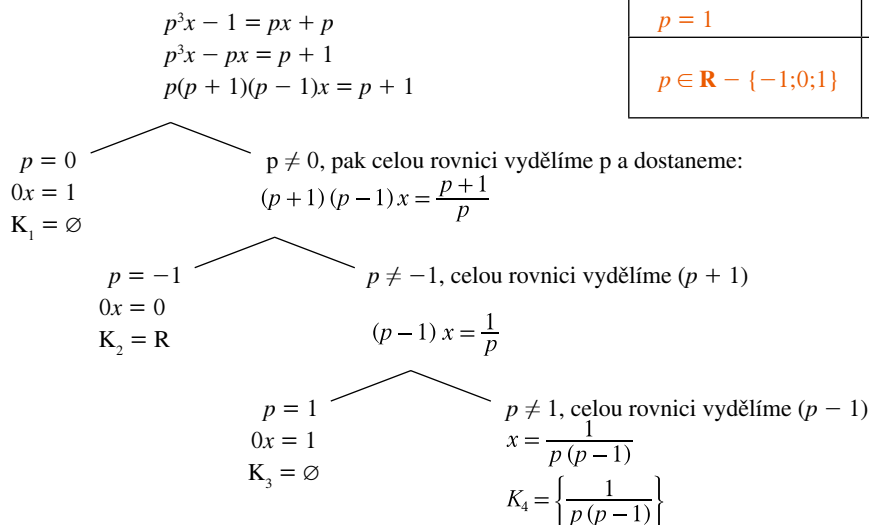
Při řešení **lineární rovnice s parametrem** rovnici postupně upravujeme v závislosti na hodnotách parametru.

Výsledek shrneme do tabulky.

Např. Řešte v $\mathbf{R}$, kde $p \in \mathbf{R}$ je parametr:

Závěr:

parametr	řešení
$p = 0$	$K_1 = \emptyset$
$p = -1$	$K_2 = \mathbf{R}$
$p = 1$	$K_3 = \emptyset$
$p \in \mathbf{R} - \{-1; 0; 1\}$	$K_4 = \left\{ \frac{1}{p(p-1)} \right\}$



■ U **kvadratické rovnice** s parametrem zjišťujeme, pro které hodnoty parametru se redukuje rovnice na lineární a dále pomocí diskriminantu D diskutujeme počet kořenů pro ty hodnoty parametru, pro něž je rovnice kvadratická.

Např. Řešte v $\mathbf{R}$, kde $p \in \mathbf{R}$ je parametr: $(p+5)x^2 - 2px + (p-1) = 0$.

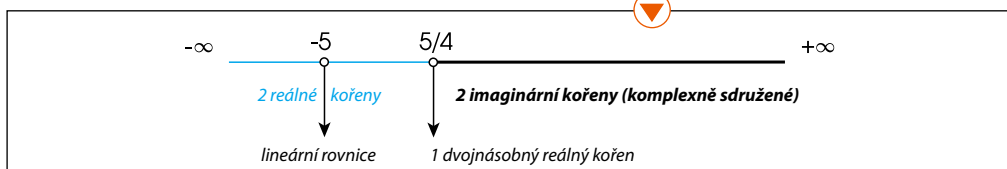
① pro $p+5 = 0$, tedy $p = -5$ je rovnice lineární: $10x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3/5$

② pro $p \neq -5$ je $D = 4p^2 - 4(p+5)(p-1) = 20 - 16p = 4(5 - 4p)$

> 0 ... 2 reálné různé kořeny

Platí: $4(5 - 4p) = 0$... jeden reálný (dvojnásobný kořen)

< 0 ... 2 komplexně sdružené kořeny



Závěr:

parametr	řešení
$p = -5$	lineární rovnice $K_1 = \{3/5\}$
$p = 5/4$	jeden dvojnásobný kořen $K_2 = \{1/5\}$
$p \in (-\infty; -5) \cup (-5; 5/4)$	dva reálné různé kořeny $K_3 = \left\{ \frac{2p \pm \sqrt{20 - 16p}}{2p + 10} \right\}$
$p \in (5/4; \infty)$	dva imaginární kořeny $K_4 = \left\{ \frac{2p \pm i\sqrt{20 - 16p}}{2p + 10} \right\}$

3.11. ALGEBRAICKÉ ROVNICE VYŠŠÍCH STUPŇŮ

- Na střední škole se řeší zpravidla algebraické rovnice vyšších stupňů, které lze převést na *součinný tvar* a rovnice *binomické*, popř. rovnice *reciproké*. Postupy řešení těchto rovnic ukazují následující příklady.

Např. Řešte v $\mathbb{C}$ rovnici převedením na součinný tvar:

Řešení: a) $x^4 - 16 = 0$

... rovnice je ekvivalentní s rovnicí $(x^2)^2 - 4^2 = 0$

$$(x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0$$

... úprava pomocí vzorce $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

$$(x - 2)(x + 2)(x - 2i)(x + 2i) = 0$$

... úprava pomocí vzorců $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ a

$$a^2 + b^2 = (a - bi)(a + bi)$$

$$x_1 = 2 \quad x_2 = -2 \quad x_3 = 2i \quad x_4 = -2i \quad \dots \text{kořeny rovnice získáme anulováním závorek}$$

(součin je nulový, je-li nulový alespoň jeden činitel součinu)

$$K = \{-2; 2; -2i; 2i\}$$

b) $x^3 + 2x^2 + 9x + 18 = 0$

... rovnici upravíme pomocí vytýkání

$$x^2(x + 2) + 9(x + 2) = 0$$

... opět vytkneme $(x + 2)$

$$(x^2 + 9)(x + 2) = 0$$

... užitím vztahu $a^2 + b^2 = (a + bi)(a - bi)$

převédeme na součinný tvar

$$(x + 3i)(x - 3i)(x + 2) = 0$$

... kořeny rovnice získáme anulováním závorek

$$x_1 = -3i \quad x_2 = 3i \quad x_3 = -2$$

$$K = \{-2; \pm 3i\}$$

Např. Řešte v $\mathbb{C}$ binomickou rovnici $ax^n + b = 0 \wedge a, b \in \mathbb{C} \wedge a \neq 0, n \in \mathbb{N}$.

Řešení: $ax^n + b = 0 \Rightarrow x^n = -\frac{b}{a} \Rightarrow x^n = m$ rovnici upravíme na vhodný tvar a komplexní číslo m na pravé straně vyjádříme v goniometrickém tvaru:

$$x^n = |m|[\cos(\alpha + k \cdot 360^\circ) + i \sin(\alpha + k \cdot 360^\circ)] \quad \dots \text{odmocněním získáme } \textit{obecné řešení}$$

$$x_k = \sqrt[n]{|m|} \left[\cos \frac{\alpha + k \cdot 360^\circ}{n} + i \sin \frac{\alpha + k \cdot 360^\circ}{n} \right] \wedge k = 0; 1; 2; \dots (n-1) \quad \dots \text{konkrétní kořeny dostaneme dosazením } k$$

$$k = 0 \Rightarrow x_0 = \sqrt[n]{|m|} \left(\cos \frac{\alpha}{n} + i \sin \frac{\alpha}{n} \right)$$

$$k = 1 \Rightarrow x_1 = \sqrt[n]{|m|} \left(\cos \frac{\alpha + 360^\circ}{n} + i \sin \frac{\alpha + 360^\circ}{n} \right)$$

$$k = 2 \Rightarrow x_2 = \sqrt[n]{|m|} \left(\cos \frac{\alpha + 2 \cdot 360^\circ}{n} + i \sin \frac{\alpha + 2 \cdot 360^\circ}{n} \right) \text{ atd.}$$

- **Poznámka:** Často lze řešit binomickou rovnici převedením na součinný tvar (viz předchozí příklad). Konkrétní postupy ukazují následující příklady:

Např. a) Řešte v $\mathbb{C}$ převedením na součinný tvar:

$$x^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x^2 + 2x + 4) = 0$$

$$x_1 = 2 \quad x_2 = -1 \pm \sqrt{1 - 4} = -1 \pm i\sqrt{3}$$

$$K = \{2; -1 + i\sqrt{3}; -1 - i\sqrt{3}\}$$

b) Řešte v $\mathbb{C}$ pomocí komplexních čísel:

$$x^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 8 \Leftrightarrow x^3 = |8|[\cos(0^\circ + k \cdot 360^\circ) + i \sin(0^\circ + k \cdot 360^\circ)]$$

Obecné řešení: $x_k = \sqrt[3]{8} \left(\cos \frac{k \cdot 360^\circ}{3} + i \sin \frac{k \cdot 360^\circ}{3} \right) \wedge k = 0; 1; 2$

kořeny rovnice: $k = 0 \Rightarrow x_0 = 2(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ) = 2$

$$k = 1 \Rightarrow x_1 = 2(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ) = -1 + i\sqrt{3}$$

$$k = 2 \Rightarrow x_2 = 2(\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ) = -1 - i\sqrt{3}$$

$$K = \{2; -1 + i\sqrt{3}; -1 - i\sqrt{3}\}$$

c) Určete obecné řešení rovnice v $\mathbb{C}$:

$$x^5 - 1 + i = 0 \Leftrightarrow x^5 = 1 - i \Leftrightarrow x^5 = \sqrt{2} [\cos(315^\circ + k \cdot 360^\circ) + i \sin(315^\circ + k \cdot 360^\circ)] \wedge k = 0, 1, 2, 3, 4$$

Obecné řešení: $x_k = \sqrt[5]{2} \left(\cos \frac{315^\circ + k \cdot 360^\circ}{5} + i \sin \frac{315^\circ + k \cdot 360^\circ}{5} \right) \wedge k = 0; 1; 2; 3; 4$

d) Řešte v $\mathbb{C}$ a kořeny rovnice znázorněte v Gaussově rovině komplexních čísel:

$$x^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow x^3 = -8 \Leftrightarrow x^3 = |-8|[\cos(180^\circ + k \cdot 360^\circ) + i \sin(180^\circ + k \cdot 360^\circ)]$$

Obecné řešení: $x_k = \sqrt[3]{|-8|} \left(\cos \frac{180^\circ + k \cdot 360^\circ}{3} + i \sin \frac{180^\circ + k \cdot 360^\circ}{3} \right) \wedge k = 0; 1; 2$

Kořeny rovnice: $k = 0 \Rightarrow x_0 = 2(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) = 1 + i\sqrt{3}$

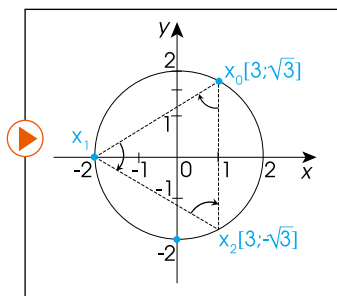
$$k = 1 \Rightarrow x_1 = 2[\cos(60^\circ + 1 \cdot 120^\circ) + i \sin(60^\circ + 1 \cdot 120^\circ)] = -2$$

$$k = 2 \Rightarrow x_2 = 2[\cos(60^\circ + 2 \cdot 120^\circ) + i \sin(60^\circ + 2 \cdot 120^\circ)] = 1 - i\sqrt{3}$$

$$K = \{-2; 1 + i\sqrt{3}; 1 - i\sqrt{3}\}$$

■ **Poznámka:**

Geometricky se jedná o „dělení kružnice“
na n stejně dlouhých oblouků
(konstrukce pravidelného n -úhelníku).



Např. Řešte v $\mathbb{C}$ reciprokou rovnici.

Řešení: a) Reciprokou rovnici *sudého stupně* řešíme pomocí *substituce*.

$$6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6 = 0 \quad \dots \text{rovnici vydělíme výrazem } \frac{1}{x^2} \text{ a spojíme první člen s posledním, druhý s předposledním atd.}$$

$$6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 38 = 0 \quad \dots \text{zavedeme substituci } x + \frac{1}{x} = y \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$$

$$6(y^2 - 2) - 5y - 38 = 0 \quad \dots \text{rovnici upravíme a určíme } y_1 \text{ a } y_2$$

$$6y^2 - 5y - 50 = 0 \begin{cases} y_1 = \frac{10}{3} \\ y_2 = -\frac{5}{2} \end{cases} \quad \dots \text{dopočítáme } x \text{ návratem do substituce}$$

$$\textcircled{1} \quad x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3} \Rightarrow 3x^2 - 10x + 3 = 0 \quad \begin{matrix} \nearrow x_1 = 3 \\ \searrow x_2 = \frac{1}{3} \end{matrix}$$

... kořeny reciproké rovnice jsou navzájem převrácená (reciproká) čísla

$$\textcircled{2} \quad x + \frac{1}{x} = -\frac{5}{2} \Rightarrow 2x^2 + 5x + 2 = 0 \quad \begin{matrix} \nearrow x_3 = -\frac{2}{3} \\ \searrow x_4 = -\frac{1}{2} \end{matrix}$$

... zapíšeme výsledek

$$K = \left\{ -2; -\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; 3 \right\}$$

b) Reciprokou rovnici *lichého stupně* převedeme na řešení rovnice *sudého stupně*:

$$6x^5 + x^4 - 43x^3 - 43x^2 + x + 6 = 0$$

... vhodně spojíme členy a vytkneme

$$6(x^5 + 1) + x(x^3 + 1) - 43x^2(x + 1) = 0$$

... vytkneme $(x + 1)$ před závorku

$$(x + 1)[6(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) + x(x^2 - x + 1) - 43x^2] = 0$$

... odtud dostaneme kořen $x_1 = 1$ a zároveň reciprokou rovnici *sudého stupně*, kterou řešíme výše uvedeným způsobem

$$\begin{matrix} \downarrow & \searrow \\ x_1 = -1 & 6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6 = 0 \end{matrix}$$

$$K = \left\{ -2; -1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; 3 \right\}$$

3.12. NEROVNICE

Jsou-li f, g funkce proměnné x definované na množině $D \subset \mathbf{R}$, pak úloha: najděte všechna $x \in D$, která po dosazení do jednoho ze vztahů $f(x) > g(x)$, $f(x) < g(x)$, $f(x) \geq g(x)$, $f(x) \leq g(x)$ dají pravdivou nerovnost, je **nerovnice s neznámou x** .

zapamatuj si

Při řešení nerovnic lze užít tyto **ekvivalentní úpravy**:

1) Záměna stran nerovnice se současnou změnou znaku nerovnice:

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow g(x) > f(x).$$

2) Přičtení konstanty nebo funkce $h(x)$ definované v D k oběma stranám nerovnice:

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow f(x) + h(x) < g(x) + h(x).$$

3) Násobení nenulovou konstantou nebo funkcí $h(x)$ definovanou v D :

$$\text{a) } h(x) > 0 \text{ pro } x \in D: f(x) < g(x) \Leftrightarrow f(x) \cdot h(x) < g(x) \cdot h(x),$$

$$\text{b) } h(x) < 0 \text{ pro } x \in D: f(x) < g(x) \Leftrightarrow f(x) \cdot h(x) > g(x) \cdot h(x).$$

4) Umocnění pro případ nezáporných stran nerovnice:

$$0 \leq f(x) < g(x) \Rightarrow f^n(x) < g^n(x), n \in \mathbf{N}.$$

5) Odmocnění pro případ nezáporných stran nerovnice:

$$0 \leq f(x) < g(x) \Rightarrow \sqrt[n]{f(x)} < \sqrt[n]{g(x)}, n \in \mathbf{N}.$$



- Použijeme-li při řešení nerovnic jen ekvivalentní úpravy, není třeba provádět zkoušku (jinak lze zkoušku provést např. obrácením postupu řešení).
- Konkrétní způsoby řešení nerovnic ukazují příklady:

Např. Řešte v $\mathbf{N}$ lineární nerovnici $3x + 1 < 2(x - 2) + 10$.

Řešení: $3x + 1 < 2(x - 2) + 10$... výraz $2(x - 2)$ upravíme roznásobením
 $3x + 1 < 2x - 4 + 10$... převedeme x na jednu stranu nerovnice, zbytek na druhou stranu nerovnice
 $3x - 2x < -4 + 10 - 1$
 $x < 5$... zapíšeme výsledek (v $\mathbf{N}$)
 $K = \{1; 2; 3; 4\}$

Např. Řešte v $\mathbf{R}$ nerovnici $\frac{x-1}{2-x} \leq 1$ převedením na **podílový tvar**.

Řešení: $\frac{x-1}{2-x} \leq 1$... nerovnici anulujeme (nelze násobit výrazem $2 - x$, neboť nevíme, zda je kladný či záporný)
 $\frac{x-1}{2-x} - 1 \leq 0$... převedeme na podílový tvar: výraz $2 - x$ musí být různý od nuly, aby byl zlomek definován*)
 $\frac{x-1-2+x}{2-x} \leq 0$

$$*) \frac{2x-3}{2-x} \leq 0 \Leftrightarrow [(2x-3) \leq 0 \wedge (2-x) > 0] \vee [(2x-3) \geq 0 \wedge (2-x) < 0]$$

Z první závorky vyplývá:

$$\left. \begin{array}{l} 2x-3 \leq 0 \Rightarrow x \leq 3/2 \\ 2-x > 0 \Rightarrow -x > -2 \Rightarrow x < +2 \end{array} \right\} K_1 = (-\infty; 3/2)$$

Z druhé závorky plyne:

$$\left. \begin{array}{l} 2x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3/2 \\ 2-x < 0 \Rightarrow x > 2 \end{array} \right\} K_2 = (2; \infty)$$

$$K = K_1 \cup K_2 = (-\infty; 3/2) \cup (2; \infty)$$

POZOR! Číslo 2 nerovnici nevyhovuje (zlomek by nebyl definován).

- **Poznámka:** Postup řešení nerovnice $*) \frac{2x-3}{2-x} \leq 0$ lze zjednodušit: nulové body $x = 3/2$ a $x = 2$ výrazů $2x - 3$ a $2 - x$ rozdělí $\mathbf{R}$ na intervaly $(-\infty; 3/2)$, $(3/2; 2)$ a $(2; \infty)$. Určíme znaménka výrazů v jednotlivých intervalech, z nich znaménko podílu a výsledek:

	$-\infty$	$3/2$	2	∞
	○	●	○	○
	$(-\infty; 3/2)$	$(3/2; 2)$	$(2; \infty)$	
$2x - 3$	−	+	+	
$2 - x$	+	+	−	
podíl	−	+	−	

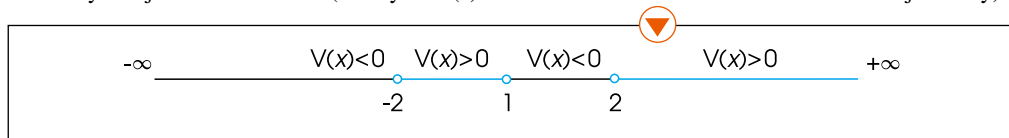
$$K = (-\infty; 3/2) \cup (2; \infty)$$

Např. Řešte v $\mathbf{R}$ nerovnici $x^3 - 4x + x^2 - 4 > 0$ převedením na **součinový tvar**.

Řešení: $x^3 - 4x + x^2 - 4 > 0$...výraz na levé straně nerovnice upravíme pomocí vytýkání
 $x^2(x+1) - 4(x+1) > 0$...opět použijeme vytýkání výrazu $(x+1)$
 $(x+1)(x^2 - 4) > 0$... výraz $x^2 - 4$ rozložíme podle vztahu $a^2 - b^2$ a dostaneme **nerovnici v součinovém tvaru**

$(x-1)(x-2)(x+2) > 0$... anulováním závorek určíme nulové body: $x = 1, x = +2$ a $x = -2$.

Pomocí nulových bodů dostaneme intervaly na číselné ose a dosazením hodnot z daných intervalů zjistíme, která x vyhovují zadané nerovnici (tzn. výraz $V(x) = x^3 - 4x + x^2 - 4$ na levé straně nerovnice je kladný).



Pak zapíšeme výsledek: **$K = (-2; 1) \cup (2; \infty)$** .

Např. Řešte v $\mathbf{R}$ kvadratickou nerovnici $x^2 - 2x - 3 > 0$.

Řešení: Pomocí rozkladu kvadratického trojčlenu převedeme nerovnici na **součinový tvar** a řešíme vhodným způsobem dál:

1. způsob

$$x^2 - 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+1) > 0 \Leftrightarrow [(x-3) > 0 \wedge (x+1) > 0] \cup [(x-3) < 0 \wedge (x+1) < 0]$$

$$\text{Odtud: } \left. \begin{array}{l} x-3 > 0 \Rightarrow x > 3 \\ x+1 > 0 \Rightarrow x > -1 \end{array} \right\} K_1 = (3; \infty) \quad \left. \begin{array}{l} x-3 < 0 \Rightarrow x < 3 \\ x+1 < 0 \Rightarrow x < -1 \end{array} \right\} K_2 = (-\infty; -1)$$

$$\mathbf{K = K_1 \cup K_2 = (-\infty; -1) \cup (3; \infty)}$$

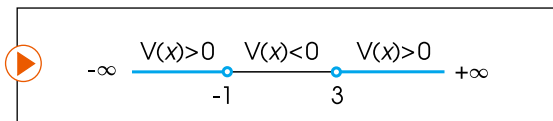
2. způsob pomocí nulových bodů -1 a 3:

	$-\infty$	-1	3	∞
	$(-\infty; -1)$	$(-1; 3)$	$(3; \infty)$	
$x - 3$	-	-	+	
$x + 1$	-	+	+	
součin	+	-	+	

$$\mathbf{K = (-\infty; -1) \cup (3; \infty)}$$

Poznámka: Zkráceně lze 2. způsob zapsat jako v předchozím příkladě

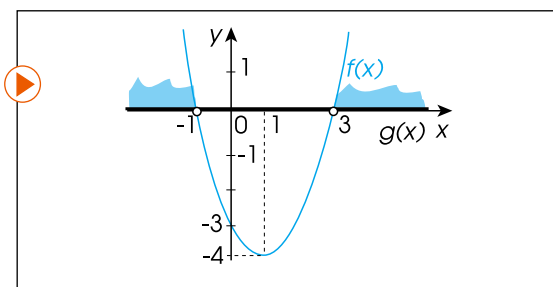
$$\mathbf{K = (-\infty; -1) \cup (3; \infty)}$$



3. způsob Graficky:

$$\underbrace{x^2 - 2x - 3}_{f(x)} > \underbrace{0}_{g(x)}$$

$$\mathbf{K = (-\infty; -1) \cup (3; \infty)}$$



Např. Řešte v **R** nerovnici s absolutní hodnotou: $|x| - |x - 1| \geq 0$.

Řešení: 1. *způsob*

Nulové body výrazů v absolutních hodnotách, tj. $x = 0$ a $x = 1$ rozdělí **R** na tři intervaly, ve kterých nerovnice řešíme.

Pro $x \in (-\infty; 0)$: $-x + x - 1 \geq 0 \Rightarrow \text{spor} \Rightarrow K_1 = \emptyset$

Pro $x \in \langle 0; 1 \rangle$: $x + x - 1 \geq 0 \Rightarrow 2x \geq 1 \Rightarrow x \geq 1/2 \Rightarrow K_2 = \langle 1/2; 1 \rangle$

Pro $x \in \langle 1; \infty \rangle$: $x - x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow K_3 = \langle 1; \infty \rangle$

K = $K_1 \cup K_2 \cup K_3 = \langle 1/2; \infty \rangle$

2. *způsob* $|x| - |x - 1| \geq 0$ upravíme na tvar $|x| \geq |x - 1|$. Užitím vztahu pro mocninu nerovnosti mezi nezápornými čísly dostáváme: $x^2 \geq x^2 - 2x + 1 \Rightarrow 0 \geq -2x + 1 \Rightarrow 2x \geq 1 \Rightarrow x \geq 1/2 \Rightarrow \mathbf{K} = \langle 1/2; \infty \rangle$.

Např. Řešte v **R** nerovnici s neznámou v odmocněnci: $\sqrt{x^2 + x - 6} < 4 - x$.

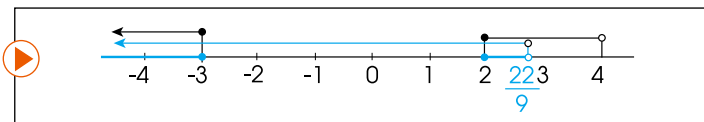
Řešení: ① Určíme definiční obor nerovnice

$x^2 + x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow (x + 3)(x - 2) \geq 0$, tedy $x \in (-\infty; -3] \cup \langle 2; \infty \rangle$

② Abychom mohli umocnit obě strany nerovnice na druhou, musí být obě strany nerovnosti **nezáporné!**

Pro každé x z definičního oboru je levá strana nerovnice nezáporné číslo. Pravá strana nerovnice je nezáporná pro $x \leq 4$. Za předpokladu, že $x \in (-\infty; -3] \cup \langle 2; 4 \rangle$ můžeme nerovnici umocnit:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + x - 6} &< 4 - x \quad /^2 \\ x^2 + x - 6 &< 16 - 8x + x^2 \\ x &< 22/9 \end{aligned}$$



$x \in [(-\infty; -3] \cup \langle 2; 4 \rangle] \cap (-\infty; 22/9) \Rightarrow \mathbf{K} = (-\infty; -3] \cup \langle 2; 22/9 \rangle$

Např. Řešte v **R** soustavu nerovnic $1 > \frac{1}{x} \wedge \sqrt{\frac{3x-1}{x-2}} > 2$.

Řešení: ① Vyřešíme samostatně první a druhou nerovnici:

(1) $1 > \frac{1}{x}$... nerovnici anulujeme

$1 - \frac{1}{x} > 0$... převedeme na spol. jmenovatele

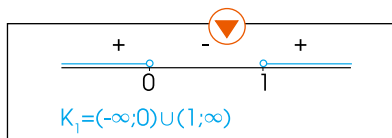
$\frac{x-1}{x} > 0$... řešíme pomocí nulových bodů 0 a 1

(2) $\sqrt{\frac{3x-1}{x-2}} > 2$

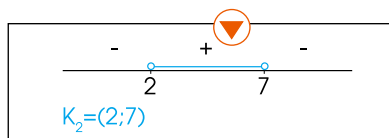
Definiční obor nerovnice: $x \in (-\infty; 1/2) \cup \langle 2; \infty \rangle$

$\frac{3x-1}{x-2} > 4 \Rightarrow \frac{3x-1}{x-2} - 4 > 0 \Rightarrow \frac{-x+7}{x-2} > 0$

Řešíme pomocí nulových bodů 2 a 7:



$K_1 = (-\infty; 0) \cup (1; \infty)$



$K_2 = (2; 7)$

Obě nerovnice musí být splněny současně, tedy: **K** = $K_1 \cap K_2 = (2; 7)$.

Cvičení 3

3.1 Vypočítejte:

- a) $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^0$ b) $2^5 \cdot 3^4 \cdot 4^{-1} \cdot 9^{-2}$
 c) $9^{3/2} \cdot 8^{-5/3} \cdot 3^{-3} \cdot 25 \cdot (-3)^0$
 d) $(25^{1/4} \cdot 9^{1/8}) \cdot (15^{1/3} \cdot 27^{-1/2})^{-3}$

3.2 Vypočítejte:

- a) $\sqrt[3]{1\frac{1}{7}}$ b) $\sqrt{48} : \sqrt{3}$
 c) $\sqrt[3]{0,008}$ d) $\sqrt[5]{7\frac{19}{32}}$

3.3 Zjednodušte:

- a) $\sqrt[3]{\sqrt{7}}$ b) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$
 c) $\frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt{5^3}}$ d) $\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{2}}{12\sqrt{2}}$

3.4 Odstraňte odmocniny ze jmenovatele zlomku (usměrňte zlomek):

- a) $\frac{6}{\sqrt{2}}$
 b) $\frac{2}{1+\sqrt{3}}$
 c) $\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$
 d) $\frac{1+3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}$

3.5 Za předpokladu, že výrazy jsou definovány zjednodušte:

- a) $\frac{27 \cdot x^6 y^3 z^5}{(3x^2 yz)^2}$
 b) $\frac{(2x^2 y)^3 \cdot (3xyz^2)^4}{8(2xy^2 z)^5}$
 c) $\left(\frac{5x^2 y}{6z^2}\right)^2 : \left(\frac{3xy^2}{18z^2}\right)^2$
 d) $\left(\frac{x \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot \sqrt{x}}\right)^{1/4} \cdot \left(\frac{\sqrt[4]{2x^4}}{2x^{-1}}\right)^{1/2} : \left[\frac{6\sqrt{27}}{3\sqrt[4]{x^{5/2}} \cdot (6x)^{-1/2}}\right]^{-1}$

3.6 Převedte na součinný tvar:

- a) $x^2 + 4x - 77$ b) $4x^2 - 8x + 3$
 c) $3x^3 + x^2 - 42x$ d) $x^5 - 81x$

3.7 Za předpokladu, že výrazy jsou definovány, zjednodušte:

- a) $\left(\frac{2x}{x+\sqrt{2x}} - \sqrt{2x}\right) : \left(\frac{\sqrt{2x}-2}{2-x}\right)$
 b) $\left(\frac{x+y}{\sqrt{xy}} - \frac{y}{\sqrt{xy}} - \frac{x}{\sqrt{xy+y}}\right) : \left(\sqrt{x} + \frac{y-\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)$

3.8 Řešte v **R** a proveďte zkoušku:

- a) $x - 10(x-3) - 3[x - (5x-4)] = 0$
 b) $\frac{7-x}{6} - \left(\frac{7-x}{3} - \frac{3+x}{4}\right) = \frac{7x+9}{8} - \frac{3-x}{2} - x$
 c) $\frac{3x-10}{x^2-5x+6} + \frac{1}{x-3} = \frac{1}{x-2}$

3.9 Řešte v **R** a proveďte zkoušku:

- a) $x^2 - 4x = 0$
 b) $x^2 - 625 = 0$
 c) $x^2 + 4x - 12 = 0$
 d) $(x+3)(x+4) + (x-1)(x-2) = 30$

3.10 Určete hodnotu parametru $p \in \mathbf{R}$ tak, aby rovnice $(p-1)x^2 - (p-2)x + 2p-1 = 0$ měla právě dva různé reálné kořeny.

3.11 Řešte v **R**:

- a) $\sqrt{x+3} = -1$
 b) $\sqrt{x^2-5} + x = 5$
 c) $\sqrt{2x+13} - \sqrt{2x} = 1$

3.12 Řešte v **R**:

- a) $|x-2| = 3$
 b) $|x-2| + |x-1| = 1$
 c) $|x+3| < 4$

3.13 Řešte v **RxR**:

- a) $4x - 3y = 3$
 $3x - y = 1$
 b) $4x + 3y - z = 7$
 $3x + 4y + z = 0$
 $5x + y + 2z = 5$
 c) $x^2 + y^2 = 100$
 $3x + 4y = 50$

3.14 Řešte v $\mathbb{C}$:

- a) $z^4 = 1$
b) $4 - (z - 3)^2 = (z + i)^2$

3.15 Řešte v $\mathbb{C}$:

- a) $2z^3 \cdot 3z^2 - 3z + 2 = 0$
b) $12z^4 - 4z^3 - 41z^2 - 4z + 12 = 0$

3.16 Řešte v $\mathbb{R}$:

- a) $x - 3 < -2x$
b) $\frac{x+12}{x+5} > 2$
c) $|3x + 1| - |x - 2| - 7 < 0$

3.17 Řešte v $\mathbb{R}$:

- a) $\sqrt{x-2} < -1$
b) $\sqrt{2x-1} + 2 < x$
c) $\sqrt{x(2-x)} < x+1$

Test 3

3.1 Vypočítejte: $\left(\frac{4}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{9}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^0$

3.2 Vypočítejte $\sqrt[2]{\frac{1}{4}}$ a výsledek vyjádřete ve tvaru desetinného čísla.

3.3 Po usměrnění je zlomek $\frac{2}{1+\sqrt{2}}$ roven:

- a) $1 - \sqrt{2}$
b) $2 + \sqrt{2}$
c) $-2\sqrt{2} - 2$
d) $2 - 2\sqrt{2}$

3.4 Pro přípustné hodnoty lze výraz

$$\frac{9x^2(3x)^{-1}y^3z^5}{3x^{-4}(yz^2)^2}$$

- zjednodušit na tvar:
a) $9x^4yz$ b) x^4y^2z c) x^5yz d) x^4y^4z

3.5 Převedte na součin: $x^2 + 6x - 16$

3.6 Řešte v $\mathbb{R}$: $(x+3)^2 + 9 = x^2$

3.7 Řešte v $\mathbb{C}$: $x^4 = 16$

3.8 Řešte v $\mathbb{R}$: $\frac{x-2}{x+1} > 1$

3.9 Řešte v $\mathbb{R}$: $|x-2| \leq 1$

3.10 Určete hodnotu parametru $p \in \mathbb{R}$ tak, aby rovnice $px^2 - 2x^2 + 2px - 4x + 2 = 0$ neměla reálné kořeny.

4. Funkce

4.1. ZAVEDENÍ POJMU FUNKCE

Při studiu přírodních jevů, ekonomických vztahů nebo při řešení technických problémů se často setkáváme s tím, že se hodnoty jedné veličiny mění v závislosti na hodnotách veličiny jiné. Procesem abstrakce dospěla matematika k zachycení této závislosti pomocí pojmu *funkce* jako zobrazení v $\mathbb{R}$.

Definice

Mějme $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ neprázdné množiny reálných čísel. Přiřadíme-li každému číslu $x \in \mathbf{A}$ podle nějakého předpisu právě jedno číslo $y \in \mathbf{B}$, které označíme $y = f(x)$, pak množina uspořádaných dvojic $[x; f(x)]$ se nazývá **reálná funkce reálné proměnné x** (stručně *funkce f*). Zapisujeme $f: y = f(x)$, resp. $f: x \rightarrow f(x)$.

poznámka

- Množinu $\mathbf{A}$ označujeme $\mathbf{D}(f)$ a nazýváme *definičním oborem* funkce f :
 $x \in \mathbf{D}(f)$ je *nezávisle proměnná*, čili *argument funkce f* .
- Číslo y přiřazené číslu x se nazývá *funkční hodnota funkce f v bodě x* .
- Množinu právě těch prvků $y \in \mathbf{B}$, z nichž ke každému existuje alespoň jeden takový prvek $x \in \mathbf{A}$, že $[x, y] \in f$ nazýváme *oborem hodnot funkce f* a značíme $\mathbf{H}(f)$.



poznámka

- Grafem funkce f v kartézské soustavě souřadnic je množina všech bodů roviny, jejichž souřadnice jsou $[x, f(x)]$. Grafem bývají zpravidla rovinné křivky. Nezávisle proměnnou x vynášíme podle úmluvy na vodorovnou osu (osa x), funkční hodnoty na svislou osu (osa y). Grafické zadání funkce je názorné, proto se uplatňuje v praktickém životě (barograf, termograf, kardiograf, počítačová grafika, ...).
- Funkce je *zadána*, známe-li její definiční obor $D(f)$ a funkční předpisy $y = f(x)$. Funkční předpis bývá určen:
 - a) *analyticky* (explicitní rovnici, implicitní rovnici) – nejrozšířenější, umožňuje snadné výpočty funkčních hodnot, málo názorný
 - b) *grafem* – názorné, ne vždy přesné
 - c) *tabulkou* – výčtem prvků $[x, f(x)]$ – pouze u funkcí s konečným definičním oborem
 - d) *slovním předpisem* – praktické návody



Např. Následující kvadratická funkce f může být zadána:

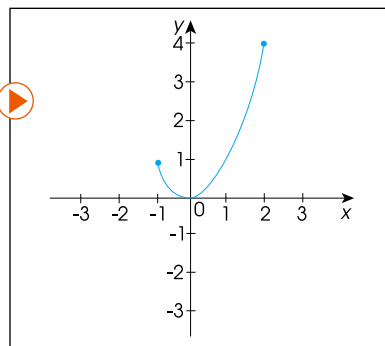
– *explicitní rovnici*:

$$f: y = x^2 \wedge x \in \langle -1; 2 \rangle$$

– *grafem*:

– *implicitní rovnici*:

$$f: x^2 - y = 0 \wedge x \in \langle -1; 2 \rangle$$



4.2. OPERACE S FUNKCEMI, ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI FUNKCÍ

Definice

Nechť f a g jsou dvě funkce s definičními obory $D(f)$ a $D(g)$ a platí $A \subseteq D(f) \cap D(g)$ ($A \neq \emptyset$). Pak zavádíme na množině A :

rovnost funkcí $f = g \Leftrightarrow \forall x \in A: f(x) = g(x)$

součet funkcí $s = f + g \Leftrightarrow \forall x \in A: s(x) = f(x) + g(x)$

(analogicky definujeme **rozdíl** $f - g$, **součin** $f \cdot g$ a pro všechna $x \in A$, pro která je $g(x) \neq 0$ i **podíl** f/g)

Např. Pro funkce $f: y = 1$ a $g: y = \frac{\sqrt{x^2}}{|x|}$

platí: $D(f) = \mathbf{R}$, $D(g) = \mathbf{R} - \{0\}$, $A = D(f) \cap D(g) = \mathbf{R} - \{0\}$.

Pak platí $\forall x \in A: f(x) = g(x)$.

Definice

Funkce f definovaná na množině $A \subseteq D(f)$ se nazývá **funkce na A**:

rostoucí $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

klesající $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

neklesající $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

nerostoucí $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

prostá $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A: x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Např.

- Funkce $f: y = \log x$ je rostoucí, funkce $f: y = -x^3$ je klesající. Obě funkce jsou prosté.
- Funkce $f: y = x^2$ v intervalu $(-\infty; 0)$ klesá, v intervalu $(0; \infty)$ roste, není prostá, neboť např. pro $x_1 = -2$ a pro $x_2 = 2$ je $f(-2) = f(2)$.

Definice

Funkce f , jejíž $\mathbf{D}(f)$ je souměrný podle počátku soustavy souřadnic, tj. pro kterou platí $x \in \mathbf{D}(f) \Rightarrow (-x) \in \mathbf{D}(f)$ se nazývá:

sudá funkce $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbf{D}(f): f(-x) = f(x)$

lichá funkce $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbf{D}(f): f(-x) = -f(x)$

Např.

- Graf sudé funkce (např. $x = \cos x$) je osově souměrný podle osy y .
- Graf liché funkce (např. $y = \sin x$) je středově souměrný podle počátku souřadnic.

Definice

Je-li funkce f definovaná v množině $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{D}(f)$, pak se nazývá:

- na $\mathbf{A}$ **zdola omezená** (ohraničená), právě když existuje takové číslo $d \in \mathbf{R}$, že pro $\forall x \in \mathbf{A}: f(x) \geq d$
- na $\mathbf{A}$ **shora omezená** (ohraničená), právě když existuje takové číslo $h \in \mathbf{R}$, že pro $\forall x \in \mathbf{A}: f(x) \leq h$
- na $\mathbf{A}$ **omezená** (ohraničená), právě když je na $\mathbf{A}$ omezená shora i zdola

Např.

- $f: y = \sin x$ je omezená shora i zdola na celém definičním oboru, je tedy omezená
- $g: y = x^3$ není omezená
- $h: y = x^2$ je omezená zdola

Definice

Je-li f funkce, $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{D}(f)$, $a \in \mathbf{A}$, $b \in \mathbf{A}$, pak funkce má na $\mathbf{A}$:

- v bodě a **minimum** (nejmenší hodnotu), právě když pro všechna $x \in \mathbf{A}$ je $f(x) \geq f(a)$
- v bodě b **maximum** (největší hodnotu), právě když pro všechna $x \in \mathbf{A}$ je $f(x) \leq f(a)$

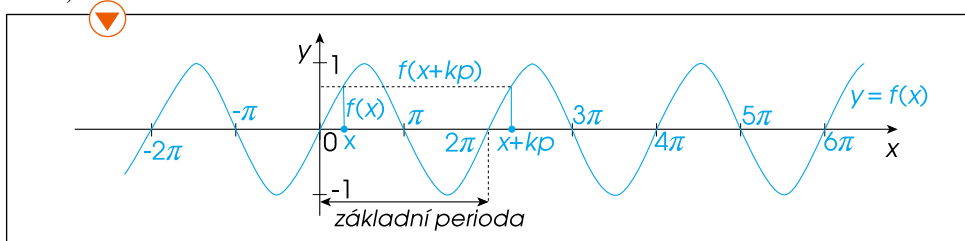
Např. $f: y = x^2 \wedge x \in \mathbf{R}$ má minimum v bodě $x = 0$, $g: y = -|x| + 1 \wedge x \in \mathbf{R}$ má v bodě $x = 0$ maximum.

Definice

Funkce f se nazývá periodická funkce, existuje-li takové $p > 0$, že pro každé $k \in \mathbf{Z}$ platí:

1. Je-li funkce definována v bodě x , pak je také definována v bodech $(x + kp)$
2. Pro všechna $x \in \mathbf{D}(f)$ platí: $f(x) = f(x + kp)$

Např. Goniometrické funkce sinus a kosinus mají **základní periodu** 2π (ale jsou periodické také s periodou 4π , 6π atd.)

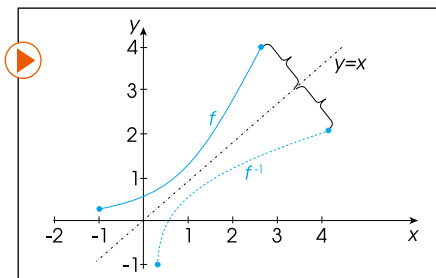


Definice

Jestliže funkce $y = f(x)$ je prostá v celém definičním oboru $\mathbf{D}(f)$ a má obor hodnot $\mathbf{H}(f)$, pak lze na $\mathbf{H}(f)$ definovat funkci, která každému číslu $y \in \mathbf{H}(f)$ přiřazuje právě to číslo $x \in \mathbf{D}(f)$, pro které je $f(x) = y$. Tato funkce se nazývá inverzní funkce k funkci f a značí se f^{-1} .

Např.

- Platí $\mathbf{D}(f) = \mathbf{H}(f^{-1})$; $\mathbf{D}(f^{-1}) = \mathbf{H}(f)$.
- Grafy funkcí f a f^{-1} jsou navzájem souměrné podle osy $y = x$.
- Je-li původní funkce např. rostoucí (klesající), je také inverzní funkce rostoucí (klesající).
- Inverzní funkce k prosté funkci je opět prostá.



Např. V praxi se často setkáváme s těmito inverzními funkcemi:

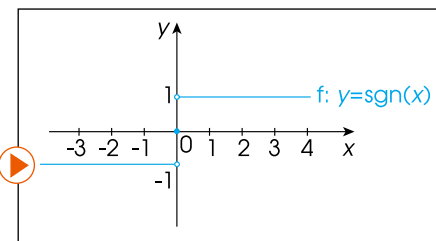
- | | |
|---|--|
| ■ $f: y = e^x$ | $f^{-1}: y = \ln x$ |
| ■ $f: y = \sin x \wedge x \in \langle -\pi/2; \pi/2 \rangle$ | $f^{-1}: y = \arcsin x \wedge x \in \langle -1; 1 \rangle$ |
| ■ $f: y = \cos x \wedge x \in \langle 0; \pi \rangle$ | $f^{-1}: y = \arccos x \wedge x \in \langle -1; 1 \rangle$ |
| ■ $f: y = \operatorname{tg} x \wedge x \in \langle -\pi/2; \pi/2 \rangle$ | $f^{-1}: y = \operatorname{arctg} x \wedge x \in \mathbf{R}$ |
| ■ $f: y = \operatorname{cotg} x \wedge x \in (0; \pi)$ | $f^{-1}: y = \operatorname{arccotg} x \wedge x \in \mathbf{R}$ |

Definice

Nechť f je funkce definovaná v jistém okolí bodu a . Říkáme, že funkce f je **spojitá v bodě a** , jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna x , pro která je $|x - a| < \delta$, platí $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Např.

- Funkce $f: y = \sin x$, $g: y = \cos x$, $h: y = x^2$ jsou *spojité* v každém bodě $x \in \mathbf{R}$.
- Funkce $f: y = \operatorname{sgn}(x)$ *není* spojitá v bodě $x = 0$.



Definice

Funkce f je **spojitá na otevřeném intervalu $(a; b)$** , je-li spojitá v každém bodě tohoto intervalu.

Např. Funkce $f: y = \sin x$, $g: y = \cos x$, $h: y = x^2$; $i: y = x^3$ jsou spojitě v $\mathbf{R}$, neboť jsou spojitě v každém bodě $x \in (-\infty; \infty)$.

4.3. POLYNOMICKÉ FUNKCE

Definice

Polynomická funkce n -tého stupně (celá racionální funkce) je každá funkce f proměnné $x \in \mathbf{R}$, kterou lze vyjádřit ve tvaru: $f: y = P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, kde $n \in \mathbf{N}$, $a_n, \dots, a_0 \in \mathbf{R} \wedge a_n \neq 0$.

Rozebereme nejdříve její speciální případy: funkci *lineární* ($n = 1$) a *kvadratickou* ($n = 2$):

LINEÁRNÍ FUNKCE

Definice

Lineární funkce je každá funkce f daná předpisem $f: y = ax + b$, kde $a \in \mathbf{R} \wedge b \in \mathbf{R}$.



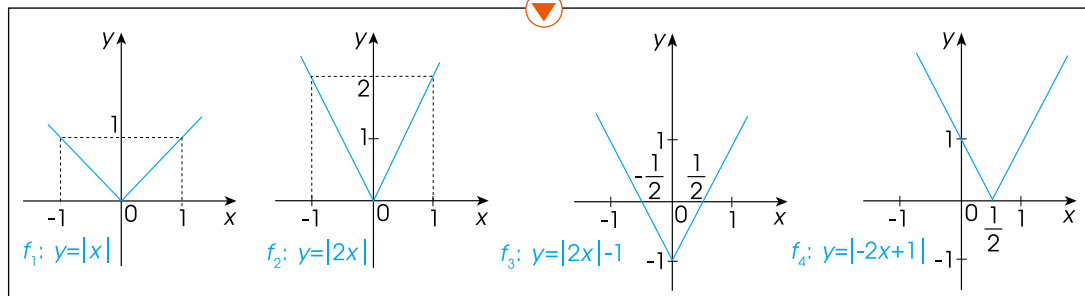
zapamatuj si

- **Grafem** lineární funkce je **přímka** různoběžná s osou y .
- **Základní vlastnosti** jsou uvedeny v tabulce:

$a < 0$	$a = 0$	$a > 0$
$D(f) = (-\infty; \infty)$ $H(f) = (-\infty; \infty)$ není omezená ani shora, ani zdola. Je klesající, tedy prostá. Nemá maximum, ani minimum. Je spojitá v $\mathbf{R}$.	$D(f) = (-\infty; \infty)$ $H(f) = \{b\}$ Je sudá (pro $b = 0$ je lichá). Je omezená. Je nerostoucí a neklesající. Není prostá. Má maximum a minimum pro každé $x \in \mathbf{R}$. Je spojitá v $\mathbf{R}$.	$D(f) = (-\infty; \infty)$ $H(f) = (-\infty; \infty)$ není omezená ani shora, ani zdola. Je rostoucí, tedy prostá. Nemá maximum, ani minimum. Je spojitá v $\mathbf{R}$.

- **Přímá úměrnost** je speciálním případem lineární funkce, pro kterou platí $a \neq 0 \wedge b = 0$. Zpravidla se zapisuje ve tvaru $f: y = kx$, kde k je tg α – směrnice grafu funkcí (např. $f: y = 2x$, $g: y = -\frac{1}{2} \cdot x$).
- **Často zapisujeme** rovnici lineární funkce ve tvaru $f: y = kx + q$, kde $k = \text{tg } \alpha$ je směrnice grafu lineární funkce, q udává průsečík grafu s osou y .
- Je-li $a = 0$, jde o **funkci konstantní** $f: y = b$ (resp. $f: y = \text{konst.}$). Např. $f: y = 3$.

- **Příklady užití:** rovnice přímky v rovině, Ohmův zákon ($U = R \cdot I$), dráha rovnoměrného pohybu ($s = s_0 + vt$) atd.
- **V praxi** se setkáváme s funkcemi typu:



KVADRATICKÁ FUNKCE

Definice

Kvadratickou funkcí nazýváme každou funkci $f: y = ax^2 + bx + c$, kde $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$.

zapamatuj si

- **Grafem** kvadratické funkce je **parabola** s osou $o \parallel y$.
Průsečík osy o s parabolou se nazývá vrchol paraboly: $V \left[-\frac{b}{2a}; c - \frac{b^2}{4a} \right]$
- **Základní vlastnosti** ukazuje tabulka:



$a < 0$	$a > 0$
Graph of a downward-opening parabola ($a < 0$). The vertex is at $\left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right)$. The y-intercept is at $(0, c)$.	Graph of an upward-opening parabola ($a > 0$). The vertex is at $\left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right)$. The y-intercept is at $(0, c)$.
$D(f) = (-\infty, \infty)$, $H(f) = (-\infty; c - \frac{b^2}{4a})$ Pro $b = 0$ je sudá, jinak ani sudá, ani lichá. Je shora omezená, není zdola omezená. Je rostoucí pro $x \in (-\infty; -b/2a)$. Je klesající pro $x \in (-b/2a; +\infty)$. Je konkávní; má ostré maximum $[-b/2a; c - b^2/4a]$. Není prostá. Je spojitá v $\mathbb{R}$.	$D(f) = (-\infty, \infty)$, $H(f) = (c - \frac{b^2}{4a}; \infty)$ Pro $b = 0$ je sudá, jinak ani sudá, ani lichá. Je omezená zdola, není shora omezená. Je rostoucí pro $x \in (-b/2a; +\infty)$. Je klesající pro $x \in (-\infty; -b/2a)$. Je konvexní; má ostré minimum $[-b/2a; c - b^2/4a]$. Není prostá. Je spojitá v $\mathbb{R}$.

- Graf funkce $f: y = ax^2 + bx + c$ dostaneme, jestliže parabolu vyjadřující graf funkce $f_1: y = ax^2$ s vrcholem $V [0; 0]$ přesuneme nejprve do vrcholu $[x_0; 0]$ funkce $f_2: y = a(x - x_0)^2$ a pak jeho vrchol přejde do

vrcholu $\left[-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right]$ grafu funkce f .

- Např.** Sestrojte graf funkce $f: x = 2x^2 + 4x - 6$

Funkci f postupně upravujeme:

$$f: y = 2(x + 2x) - 6$$

$$f: y = 2(x + 1)^2 - 6 - 2$$

$$f: y = 2(x + 1)^2 - 8 \Rightarrow V [-1; -8]$$

Průsečík s osou y ($x = 0$): $y = -6$

Průsečík s osou x ($y = 0$):

$$2x^2 + 4x - 6 = 0 \Rightarrow x_1 = -3, x_2 = 1$$

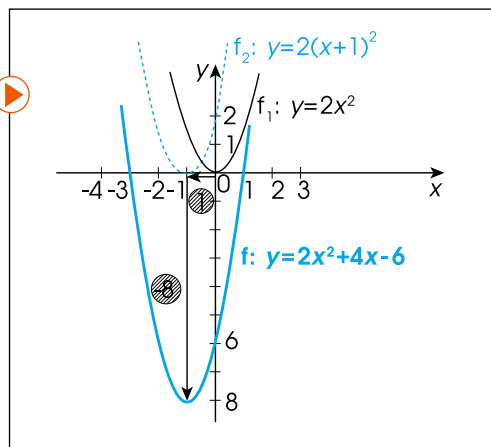
Konstrukce grafu f_1, f_2 a f plyne z obrázku:

(Vrchol V lze určit i jako extrém funkce pomocí derivačního počtu).

$$f_1: y = 2x^2$$

$$f_2: y = 2(x + 1)^2$$

$$f: y = 2x^2 + 4x - 6$$

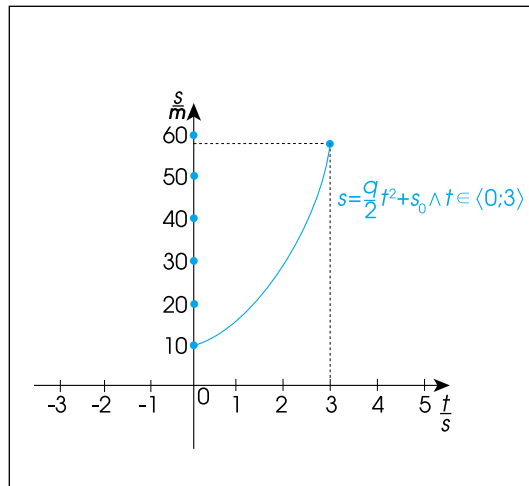
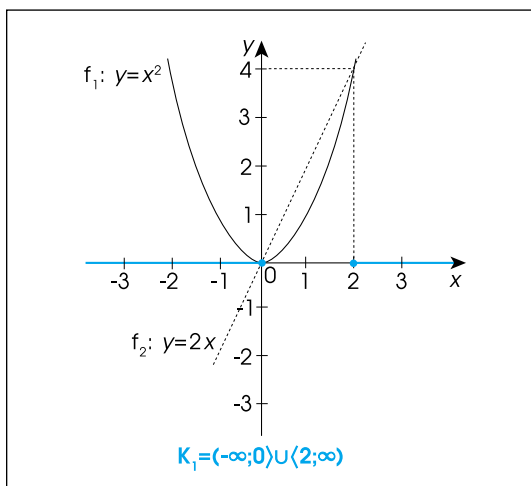


- S kvadratickou funkcí se setkáváme při řešení kvadratických rovnic a nerovnic, určuje rovnici paraboly, je používána ve fyzice (např. $s = \frac{g}{2} t^2$; $E_k = \frac{1}{2} mv^2$) atd.

Např.

- Řešte graficky v $\mathbf{R}$: $\frac{x^2}{f_1} \geq \frac{2x}{f_2}$

- Znázorněte závislost dráhy tělesa na čase pro volný pád tělesa ve vakuu v prvních třech sekundách, je-li $s = \frac{g}{2} t^2 + s_0 \wedge s_0 = 10 \text{ m}$.



- V matematice pracujeme s polynommickými funkcemi n -tého stupně například při řešení rovnic a nerovnic. Užíváme následující definice a věty:

Definice

Nulový bod polynommické funkce f stupně $n \geq 1$ (nebo také **kořen algebraické rovnice** $f(x) = 0$) je každé reálné číslo x_0 , pro které platí $f(x_0) = 0$. Dvojčlen $(x - x_0)$ je **kořenový činitel** funkce f .

Věty o polynommické funkci

- Je-li x_0 nulový bod polynommické funkce stupně $n \geq 1$, pak existuje polynommická funkce g stupně $(n - 1)$ taková, že pro všechna reálná x platí $f(x) = (x - x_0) \cdot g(x_0)$.
- Každá polynommická funkce stupně $n \geq 1$ se dá vyjádřit jako součin polynommických funkcí stupně nejvýše 2.
- Necht f je polynommická funkce; $a, b \in \mathbf{R} \wedge a < b$. Pak funkce f nabývá každé hodnoty mezi $f(a)$ a $f(b)$ aspoň pro jedno $x \in (a; b)$.
- Polynommická funkce lichého stupně má aspoň jeden nulový bod.
- Necht f je polynommická funkce stupně $n \geq k$, $k \in \mathbf{N}$. Číslo x_0 se nazývá k -násobným kořenem rovnice $f(x) = 0$, když existuje polynommická funkce g tak, že platí $f(x) = (x - x_0)^k \cdot g(x) \wedge g(x_0) \neq 0$.

Např. Řešte v $\mathbf{R}$: (*) $4x^3 + 4x^2 - 13x + 5 = 0$.

1. Odhadem určíme kořen $x_0 = 1$ ($4 \cdot 1^3 + 4 \cdot 1^2 - 13 \cdot 1 + 5 = 0$)
2. Na základě vět o polynommické funkci můžeme rovnici psát ve tvaru: $(x - 1)(ax^2 + bx + c) = 0$
3. Po roznásobení dostáváme:

$$ax^3 + bx^2 - ax^2 + cx - bx - c = 0 \Rightarrow ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c = 0$$

4. Porovnáním se zadanou rovnicí (*) dostáváme:

$$\left. \begin{array}{l} a = 4 \\ b - a = 4 \\ c - b = 13 \\ -c = 5 \end{array} \right\} a = 4, b = 8, c = -5$$

5. Původní rovnici lze upravit na tvar: $(x - 1)(4x^2 + 8x - 5) = 0$

6. Řešením rovnice v součinném tvaru dostáváme: $x_1 = 1, x_{2,3} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 80}}{8} = \nearrow \frac{1}{2} \searrow -\frac{5}{2}$

7. Řešení rovnice (*) je $\mathbf{K} = \left\{ 1; \frac{1}{2}; -\frac{5}{2} \right\}$

4.4. MOCINNÉ FUNKCE

MOCINNÁ FUNKCE S PŘIROZENÝM MOCNITELEM

Definice

Mocinná funkce s přirozeným mocnitelem je funkce $f: y = x^n, n \in \mathbb{N}$.



zapamatuj si

- Grafem této funkce je pro $n = 1$ **přímka** (osa I. a III. kvadrantu),
pro $n > 1$ **parabola n -tého stupně**.
- **Základní vlastnosti** funkce jsou uvedeny v tabulce:

n liché	n sudé
$D(f) = (-\infty; \infty), H(f) = (-\infty; \infty)$ Je lichá. Nemá ani shora, ani zdola omezená. Je rostoucí, tedy prostá. Nemá ani maximum ani minimum. Je spojitá v $\mathbb{R}$.	$D(f) = (-\infty; \infty), H(f) = [0; \infty)$ Je sudá. Je omezená zdola, není shora omezená. Je rostoucí pro $x \in (0; +\infty)$. Je klesající pro $x \in (-\infty; 0)$. Nemá prostá. Nemá maximum, má minimum $(0; 0)$. Je spojitá v $\mathbb{R}$.

Např. Na základě vlastností mocinné funkce seřadte podle velikosti čísla:

a) $(0,5)^3, (-0,5)^3, (1,5)^3, (-2)^3, (2)^3, -0,25^3$

Řešení plyne z grafu: $(-2)^3 < (-0,5)^3 < -0,25^3 < 0,5^3 < 1,5^3 < 2^3$.

b) $(0,5)^2, (-0,5)^2, (1,5)^2, (-2)^2, (2)^2, -0,25^2$

Řešení plyne z grafu: $-0,25^2 < (-0,5)^2 = (0,5)^2 < 1,5^2 < (-2)^2 = 2^2$.

c) $0,5^2, 0,5^4, 0,5^6$

Řešení plyne z grafu: $0,5^6 < 0,5^4 < 0,5^2$.

MOCINNÁ FUNKCE SE ZÁPORNÝM CELÝM MOCNITELEM

Definice

Mocninná funkce se záporným celým exponentem je funkce $f: y = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$.



zapamatuj si

- Mocninnou funkci se záporným celým exponentem lze psát ve tvaru $f: y = \frac{1}{x^n}$
Např. $f: y = x^{-3}$ jako $f: y = \frac{1}{x^3}$
- Grafem této mocninné funkce je **hyperbola n -tého stupně**.
- Vlastnosti mocninné funkce se záporným celým mocnitelem:

n liché	n sudé
$D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$, $H(f) = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$ Je lichá. Nemá ani shora, ani zdola omezená. Klesá pro $x \in (-\infty; 0)$ a $x \in (0; \infty)$. Nemá ani maximum, ani minimum. Je spojitá pro $x \in (-\infty; 0)$ a $x \in (0; \infty)$. Je prostá.	$D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$, $H(f) = (0; \infty)$ Je sudá. Je omezená zdola, není shora omezená. Je rostoucí pro $x \in (-\infty; 0)$. Je klesající pro $x \in (0; \infty)$. Není prostá. Nemá ani maximum, ani minimum. Je spojitá pro $x \in (-\infty; 0)$ a $x \in (0; \infty)$.

Např. Vypočtete:

$$(-1)^{-3} = \frac{1}{(-1)^3} = -1$$

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

$$(-3)^{-3} = \frac{1}{(-3)^3} = -\frac{1}{27}$$

$$(-1)^{-2} = \frac{1}{(-1)^2} = 1$$

$$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

$$(-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9}$$

4.5. LOMENÁ RACIONÁLNÍ FUNKCE

Definice

Lomenou racionální funkcí nazýváme každou funkci f , danou předpisem $f: y = \frac{P(x)}{Q(x)}$, kde $P(x)$, $Q(x)$ jsou nesoudělné polynomy, $Q(x)$ není nulový polynom.



zapamatuj si

- **Definičním oborem** $D(f)$ racionální lomené funkce je množina všech $x \in \mathbf{R}$, která nejsou kořeny rovnice $Q(x) = 0$.
- Důležitým případem racionálních lomených funkcí jsou lineární lomené funkce: $f: y = \frac{ax+b}{cx+d}$, kde $c \neq 0 \wedge ad \neq bc$.
- Grafem této funkce $f: y = \frac{ax+b}{cx+d}$ je rovnoosá hyperbola, která má střed $S\left[-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right]$ a její asymptoty procházejí středem S tak, že jedna je rovnoběžná s osou x , druhá s y .

Např. Graf funkce $f: y = \frac{2x-5}{x-1}$ se sestrojí takto:

$$D(f) = \mathbf{R} - \{1\}$$

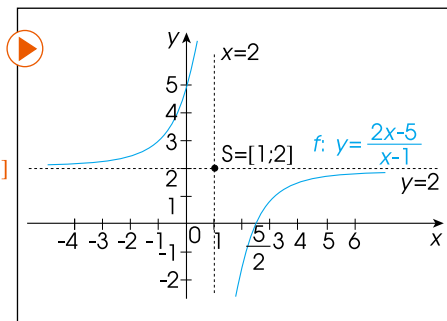
Úpravou: střed hyperboly

$$y = \frac{2x-5}{x-1} \Rightarrow y = \frac{2(x-1)-3}{(x-1)} \Rightarrow y = 2 - \frac{3}{(x-1)} \Rightarrow S[1;2]$$

Asymptoty: $x = 1; y = 2$

Průsečíky s osami: $y = 0 \Rightarrow x = 5/2 \dots X[5/2;0]$

$x = 0 \Rightarrow y = 5 \dots Y[0;5]$



Poznámka: V praxi se často setkáváme s **nepřímou úměrností** $f: y = \frac{k}{x}$, $k \in \mathbf{R} - \{0\}$.

- Nepřímá úměrnost se často vyskytuje jak v matematických, tak fyzikálních a chemických úlohách

(např. $p = \frac{c}{V}$ – Boyleův Mariottův zákon, $C = \frac{Q}{U}$, $\varphi = \frac{1}{f}$, ...).

- Při řešení slovních úloh se často používá **trojčlenka**.

Např. Dva zedníci omítnou chodbu nové budovy za 54 hodin. Za kolik hodin by tuto chodbu omítlo 9 zedníků?

Řešení:

2 zedníci	54 hodin	↑	$\frac{x}{54} = \frac{2}{9} \Rightarrow x = 12$ hodin
9 zedníků	x hodin		

Devět zedníků omítně chodbu za 12 hodin.

zapamatuj si

- **Vlastnosti** nepřímé úměrnosti $f: y = \frac{k}{x} \wedge k \in \mathbb{R} - \{0\}$



$k < 0$	$k > 0$
$D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$, $H(f) = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$ Je lichá. Nemá ani shora, ani zdola omezená. Je rostoucí pro $x \in (-\infty; 0)$ a $x \in (0; \infty)$. Je prostá. Nemá maximum, ani minimum. Je spojitá pro $x \in (-\infty; 0)$ a $x \in (0; \infty)$.	$D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$, $H(f) = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$ Je lichá. Nemá ani shora, ani zdola omezená. Je klesající pro $x \in (-\infty; 0)$ a $x \in (0; \infty)$. Je prostá. Nemá maximum, ani minimum. Je spojitá pro $x \in (-\infty; 0)$ a $x \in (0; \infty)$.

4.6. EXPONENCIÁLNÍ A LOGARITMICKÁ FUNKCE

EXPONENCIÁLNÍ FUNKCE

Definice

Exponenciální funkce o základu a je dána předpisem: $f: y = a^x$, kde $a > 0 \wedge a \neq 1$.



zapamatuj si

- **Grafem** exponenciální funkce je **exponenciální křivka (exponenciála)**.
- **Vlastnosti** exponenciálních funkcí $f: y = a^x$:

$0 < a < 1$	$a > 1$
$D(f) = (-\infty; \infty)$, $H(f) = (0; \infty)$ Nemá sudá, ani lichá. Je omezená zdola ($a^x > 0$), není shora omezená. Je klesající, a tedy prostá. Nemá maximum, ani minimum. Je inverzní k funkci logaritmické. Je spojitá v $\mathbb{R}$.	$D(f) = (-\infty; \infty)$, $H(f) = (0; \infty)$ Nemá sudá, ani lichá. Je omezená zdola ($a^x > 0$), není shora omezená. Je rostoucí, a tedy prostá. Nemá maximum, ani minimum. Je inverzní k funkci logaritmické. Je spojitá v $\mathbb{R}$.

- Exponenciální funkce o základu 10 se nazývá **dekadická exponenciální funkce** $f: y = 10^x$.
- Je-li základem tzv. **Eulerovo číslo** $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,718281 \dots$ nazývá se funkce $f: y = e^x$ **přírozená exponenciální funkce**.
- Exponenciální funkce se často vyskytuje v praxi, např. zákon radioaktivní přeměny $N = N_0 e^{-\lambda t}$, zákon absorpce záření $I = I_0 e^{-ax}$, řešení exponenciálních rovnic a nerovnic atd.

Např. Převedením na společný základ a porovnáním exponentů řešte exponenciální rovnice a nerovnice v $\mathbf{R}$:

a) $3^{2x-1} = 27$
 $3^{2x-1} = 3^3$

Porovnáním exponentů:

$$2x - 1 = 3$$

$$x = 2$$

$$\mathbf{K = \{2\}}$$

b) $x+2 \sqrt{8} = x+1 \sqrt{4}$

$$2^{\frac{3}{x+2}} = 2^{\frac{2}{x+1}}$$

Porovnáním exponentů:

$$\frac{3}{x+2} = \frac{2}{x+1}$$

$$x = 1$$

$$\mathbf{K = \{1\}}$$

c) $\frac{1}{2} > 4^x$

$$2^{-1} > 2^{2x}$$

Porovnáním exponentů:

$$x < -1/2$$

$$\mathbf{K = (-\infty, -1/2)}$$

- Funkce 10^x a e^x naleznete na každém dobrém kalkulátoru → vyhledávání hodnot viz návod.

LOGARITMICKÁ FUNKCE

Definice

Logaritmická funkce o základu a , kde $a > 0 \wedge a \neq 1$, je funkce inverzní k exponenciální funkci o téže základu. Označuje se $f: y = \log_a x$ (kde $x \in (0; \infty)$).

zapamatuj si

- Grafem logaritmické funkce je **logaritmická křivka**.
- Funkční hodnoty logaritmické funkce se nazývají **logaritmy**. Podle definice platí: $y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$ pro každé $a > 0 \wedge a \neq 1$, $x \in (0; \infty)$, $y \in \mathbf{R}$.



Např. $\log 100 = 2$, neboť $10^2 = 100$

$$\log_2 32 = 5, \text{ neboť } 2^5 = 32$$

$$\log_{\frac{1}{10}} 1000 = -3, \text{ neboť } \left(\frac{1}{10}\right)^{-3} = 1000$$

$$\log_2 \sqrt{8} = \frac{3}{2}, \text{ neboť } 2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{8}$$

- Nejčastěji se jedná o dekadické logaritmy ($a = 10$), které značíme $\log x$, popř. o přírozené (Napierovy) logaritmy $\ln x$ se základem $a = e$. Obecný vztah mezi soustavami logaritmů je: $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$.

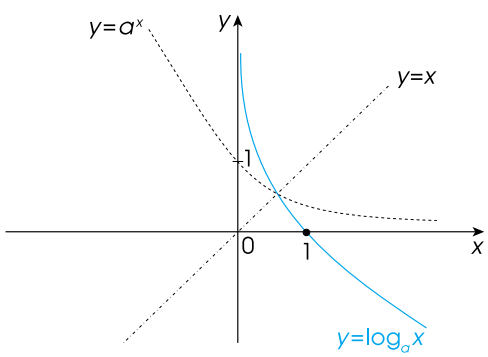
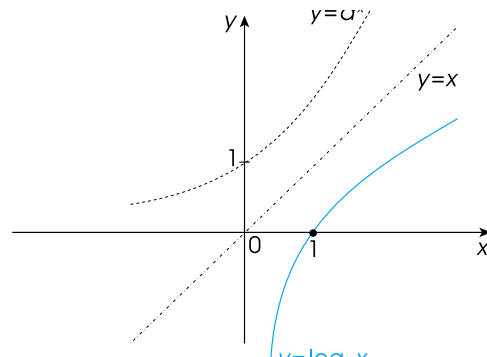
Např. a) $\log a = \frac{\ln a}{\ln 10} = \log e \cdot \ln a$, kde $\frac{1}{\ln 10} = \log e = M = 0,434294 \dots$ se nazývá modul soustavy dekadických logaritmů

b) $\ln a = \ln 10 \cdot \log a$, kde $\ln 10 = \frac{1}{M} = m = 2,302585 \dots$ se nazývá modul soustavy přirozených logaritmů

c) $\log_3 2 = \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 3} = 0,631$

d) $\log_9 6 = \frac{\log_{10} 6}{\log_{10} 9} = 0,816$

■ **Vlastnosti** logaritmické funkce ukazuje tabulka:

$0 < a < 1$	$a > 1$
	
$D(f) = (0; \infty)$, $H(f) = (-\infty; \infty)$ Není ani sudá, ani lichá. Není omezená ani zdola, ani shora. Je klesající, tedy prostá. Nemá ani maximum, ani minimum. Je inverzní k funkci exponenciální. Je spojitá v $(0; \infty)$.	$D(f) = (0; \infty)$, $H(f) = (-\infty; \infty)$ Není ani sudá, ani lichá. Není omezená ani zdola, ani shora. Je rostoucí, tedy prostá. Nemá ani maximum, ani minimum. Je inverzní k funkci exponenciální. Je spojitá v $(0; \infty)$.

■ Pro počítání s logaritmy užíváme věty o logaritmech:

Nechť $a > 0 \wedge a \neq 1 \wedge x_1, x_2 \in (0; \infty)$. Pak platí: (1) $\log_a x^r = r \cdot \log_a x \wedge x \in \mathbb{R}$

(2) $\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_a x \wedge n \in \mathbb{N}$

(3) $\log_a (x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$

(4) $\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2$

Např. a) $\log(5x^3y^2) = \log 5 + 3\log x + 2\log y; \quad x > 0, y > 0$

b) $\log \frac{5x^3}{2y^4} = \log 5 + 3\log x - \log 2 - 4\log y; \quad x > 0, y > 0$

c) $\log \sqrt{\frac{xy^5}{z^3}} = \frac{1}{2}(\log x + 5\log y - 3\log z); \quad x > 0, y > 0, z > 0$

d) $\log(a-b) + 2\log c = \log[(a-b) \cdot c^2]; \quad a-b > 0, c > 0$

e) $\log b - \frac{1}{5}\log(a+b) = \log \frac{b}{\sqrt[5]{a+b}}; \quad b > 0, a+b > 0$

f) $2 + 3\log a - 4\log b = \log \frac{100a^3}{b^4}; \quad a > 0, b > 0$

■ S logaritmy se setkáváme při řešení logaritmických a exponenciálních rovnic a nerovnic i v technické praxi, (např. $\lambda = \frac{\ln 2}{T}$, $pH = -\log[H_3O^+]$, $S = k \cdot \ln P$, ...).

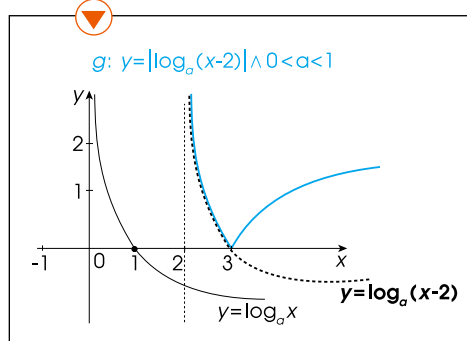
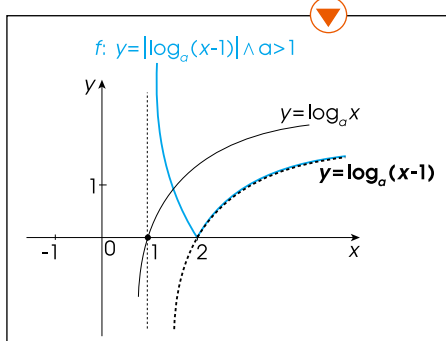
■ Úprava $a^y = x$ na tvar $y = \log_a x$ se nazývá logaritmování, obrácená úprava odlogaritmování.

Např. a) Zlogaritmuje výraz: $V = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow \log V = \log 4 + \log \pi + 3\log r - \log 3 \wedge r > 0$

b) Odlogaritmuje: $\frac{1}{2}\log 3 + \frac{1}{2}\log d - \log 2 = \log x \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3d}}{2} \wedge d > 0$

■ Často pracujeme s grafy složených funkcí:

Např. Grafy:



LOGARITMICKÁ ROVNICE

Definice

Logaritmickou rovnici je rovnice, v níž se vyskytují logaritmy výrazů s neznámou $x \in \mathbb{R}$.

zapamatuj si

- Řešení základní logaritmické rovnice $\log_a x = b$, kde $a > 0 \wedge a \neq 1, b \in \mathbb{R}$ je podle definice logaritmu $x = a^b$ (Např. $\log_2 x = 3 \Leftrightarrow x = 2^3$).
- Složitější logaritmické rovnice nejprve upravíme na tvar $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, kde $a > 0 \wedge a \neq 1$ a funkce $f(x), g(x)$ nabývají kladných hodnot. Jelikož je logaritmická funkce prostá v celém svém definičním oboru, pak: $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$.



Např. Řešte v $\mathbf{R}$:

a) $\log_2(x - 6) = 3$

Předpoklady: $x - 6 > 0 \Rightarrow x > 6$

Úpravou: $\log_2(x - 6) = \log_2 8$

$$x - 6 = 8$$

$$x = 14$$

$$*) \left(\textcircled{\text{Zk}} \right) \left. \begin{aligned} l(14) &= \log_2(14 - 6) = \log_2 8 = 3 \\ p(14) &= 3 \end{aligned} \right\} =$$

$$\mathbf{K} = \{14\}$$

b) $\log x + \frac{1}{\log x} = 2$

Předpoklady: $x > 0 \wedge \log x \neq 0 \Rightarrow x \in (0; 1) \cup (1; \infty)$

Substituce: $\log x = u$ vede k rovnici

$$u^2 - 2u + 1 = 0, \text{ jejíž kořen } u = 1$$

Je-li $\log x = 1$, pak $x = 10$

$$*) \left(\textcircled{\text{Zk}} \right) \left. \begin{aligned} l(10) &= \log 10 + \frac{1}{\log 10} = 1 + 1 = 2 \\ p(10) &= 2 \end{aligned} \right\} =$$

$$\mathbf{K} = \{10\}$$

c) $\frac{\log(x^2 + 5)}{2 \log(3 - x)} = 1 \quad / \cdot 2 \log(3 - x)$

Předpoklady:
$$\left. \begin{aligned} x^2 + 5 &> 0 \\ 3 - x &> 0 \\ \log(3 - x) &\neq 0 \end{aligned} \right\} x \in (-\infty; 2) \cup (2; 3)$$

Roznásobením: $\log(x^2 + 5) = 2 \cdot \log(3 - x)$

Úpravou: $\log(x^2 + 5) = \log(3 - x)^2$

Rovnice $x^2 + 5 = (3 - x)^2$ má řešení $x = \frac{2}{3}$

$$*) \left(\textcircled{\text{Zk}} \right) \left. \begin{aligned} l\left(\frac{2}{3}\right) &= \frac{\log\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 5\right]}{2 \log\left(3 - \frac{2}{3}\right)} = \frac{\log \frac{49}{9}}{2 \log \frac{7}{3}} = \frac{\log\left(\frac{7}{3}\right)^2}{2 \log \frac{7}{3}} = 1 \\ p\left(\frac{2}{3}\right) &= 1 \end{aligned} \right\} =$$

$$\mathbf{K} = \left\{ \frac{2}{3} \right\}$$

d) $\log 2x - \log \sqrt[3]{x} + \log x^2 = \log 2 - \log x^{-3} + 1$

Předpoklady: $x > 0$

Úpravou: $\log 2 + \log x - \frac{1}{3} \log x + 2 \log x = \log 2 + 3 \log x + 1$

$$-\frac{1}{3} \log x = 1 \quad / \cdot (-3) \Rightarrow \log x = -3 \Rightarrow x = 10^{-3}$$

$$*) \left(\textcircled{\text{Zk}} \right) \left. \begin{aligned} l(10^{-3}) &= \log(2 \cdot 10^{-3}) - \log \sqrt[3]{10^{-3}} + \log(10^{-3})^2 = \log 2 - 8 \\ p(10^{-3}) &= \log 2 - \log(10^{-3})^{-3} + 1 = \log 2 - 8 \end{aligned} \right\} =$$

$$\mathbf{K} = \{0,001\}$$

*) Udáme-li podmínky řešení a provádíme-li jen ekvivalentní úpravy, není zkouška nutná.

EXPONENCIÁLNÍ ROVNICE

Exponenciální rovnice je rovnice, ve které se neznámá $x \in \mathbf{R}$ vyskytuje v exponentu nějaké mocniny.

zapamatuj si

- **Základní rovnice** $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, kde levá i pravá strana mají stejný základ mocniny $a > 0 \wedge a \neq 1$ řešíme *porovnáním exponentů*.
- **Rovnice typu** $a^{f(x)} = b^{g(x)}$, kde $a > 0 \wedge a \neq 1 \wedge b > 0 \wedge b \neq 1$, kde $a \neq b$, tj. rovnice o různém základu mocniny řešíme *logaritmováním*: $f(x) \cdot \log a = g(x) \cdot \log b$.
- **Složitější exponenciální rovnice** převedeme na jeden z výše uvedených tvarů.



Např. Řešte v $\mathbf{R}$:

a) $2^{x+1} = 4$;

$$2^{x+1} = 2^2$$

Porovnáním exponentů:

$$x + 1 = 2$$

$$x = 1$$

$$K = \{1\}$$

b) $3^{2x+1} = 5^x$

Zlogaritmováním:

$$(2x + 1)\log 3 = x\log 5$$

$$2x\log 3 - x\log 5 = -\log 3$$

$$x(2\log 3 - \log 5) = -\log 3$$

$$x = \frac{-\log 3}{\log 9 - \log 5}$$

$$K = \left\{ \frac{-\log 3}{\log 9 - \log 5} \right\}$$

c) $9^x + 2 \cdot 3^x - 3 = 0$

Substitute: $3^x = y$

$$y^2 + 2y - 3 = 0$$

$$(y + 3)(y - 1) = 0$$

$$y_1 = -3$$

$$3^x = -3$$

nevyhovuje

$$y_2 = 1$$

$$3^x = 1$$

$$3^x = 3^0$$

$$x = 0$$

$$K = \{0\}$$

EXPONENCIÁLNÍ A LOGARITMICKÉ NEROVNICE

poznámka

Řešení exponenciálních a logaritmických nerovnic vychází ze vztahů:

pro $0 < a < 1$: $a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$
 $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$
 $\log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x)$
 $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) < g(x)$

pro $a > 1$: $a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$
 $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$
 $\log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) < g(x)$
 $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x)$



Např. Řešte v $\mathbf{R}$:

a) $3^{x+4} < 9$

$$3^{x+4} < 3^2 \Leftrightarrow x + 4 < 2$$

$$x < -2$$

$$K = (-\infty; -2)$$

c) $\log_{1/2}(x^2 - 5x - 7) > 1$ Vždy platí $x^2 - 5x + 7 > 0$

$$4^{\log_{1/2}(x^2 - 5x - 7)} > 4^0 \Leftrightarrow \log_{1/2}(x^2 - 5x + 7) > 0$$

$$\log_{1/2}(x^2 - 5x + 7) > \log_{1/2} 1 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 7 < 1$$

$$x^2 - 5x + 6 < 0$$

$$K \in (2; 3)$$

b) $\log_{1/2}(x + 3) \geq -2$

Předpoklad: $x + 3 > 0 \Rightarrow x > -3$

$$\log_{1/2}(x + 3) \geq \log_{1/2} 4 \Leftrightarrow x + 3 \leq 4$$

$$x \leq 1$$

$$K = (-3; 1]$$

Např. Řešte v $\mathbb{R}$: $\left| \frac{\log x - 1}{3} \right| \leq 2$

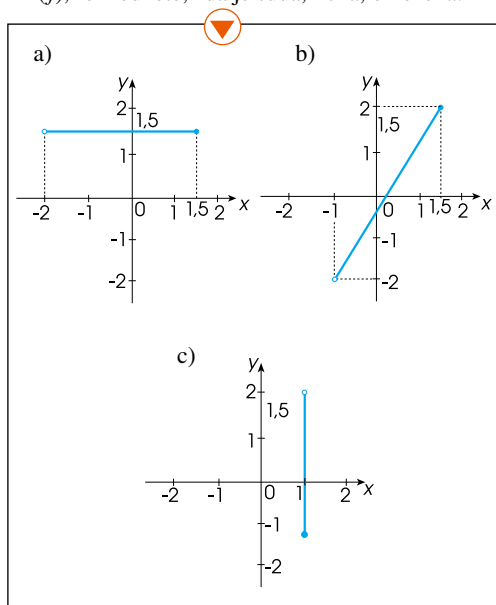
$$\begin{aligned} \textcircled{1} \text{ Pro } \frac{\log x - 1}{3} < 0 \text{ platí: } \log x - 1 < 0 \Rightarrow x \in (0; 10) \\ \text{Pak } \frac{-\log x + 1}{3} \leq 2/3 \Rightarrow -\log x + 1 \leq 6 \Rightarrow \log x \geq -5 \Rightarrow x \geq 10^{-5} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\frac{\log x - 1}{3}} \right\} \Rightarrow K_1 = \langle 10^{-5}; 10 \rangle$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \text{ Pro } \frac{\log x - 1}{3} \geq 0 \text{ platí: } \log x - 1 \geq 0 \Rightarrow \log x \geq 1 \Rightarrow x \in \langle 10; \infty \rangle \\ \text{Pak } \frac{\log x - 1}{3} \leq 2/3 \Rightarrow \log x - 1 \leq 6 \Rightarrow \log x \leq 7 \Rightarrow x \leq 10^7 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\frac{\log x - 1}{3}} \right\} \Rightarrow K_2 = \langle 10; 10^7 \rangle$$

Závěr: $K = \langle 10^{-5}; 10^7 \rangle$

Cvičení 4

- 4.1 Popište definiční rovnici funkci f , která vyjadřuje závislost:
- obvodu čtverce O na délce jeho strany a
 - obsahu čtverce S na délce jeho strany a
 - poloměru r kružnice čtverci opsané na délce jeho strany a
- 4.2 Ověřte, zda graf vyjadřuje funkci. Pokud ano, určete její definiční obor $D(f)$ a obor hodnot $H(f)$, rozhodněte, zda je sudá, lichá, omezená.



- 4.3 Určete definiční obor funkcí:
- $f: y = \frac{2x-1}{\sqrt{x}}$
 - $f: y = \log \sqrt{x-1}$
 - $f: y = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{tg} x}$
- 4.4 Napište definiční rovnici kvadratické funkce, jejíž graf prochází body $A[1;0]$, $B[2;3]$, $C[0;1]$. Pak určete, pro které $x \in \mathbb{R}$ má funkce absolutní minimum.
- 4.5 K dané funkci f určete funkci inverzní f^{-1} . Určete $D(f)$, $H(f)$, $D(f^{-1})$ a $H(f^{-1})$, je-li funkce f popsána definiční rovnicí:
- $f: y = 3x + 1 \wedge x \in \langle -1; 5 \rangle$
 - $f: y = \ln(x-2) \wedge x \in (2; \infty)$
- 4.6 Určete obsah útvaru U , jehož hranici tvoří grafy funkcí f a f^{-1} , je-li $f: y = x^2 \wedge x \in \langle 0; 1 \rangle$. Útvar U narýsujte.
- 4.7 Sestrojte graf funkce $f: y = \frac{4-x}{2+x}$
- 4.8 Určete a tak, aby platilo:
- $a^{7/4} < a^{3/4}$
 - $a^{-1/2} \geq a^{1/2}$
 - $2^{a+1} < 4$

4.9 Řešte v $\mathbf{R}$:

- a) $3^{2x-1} = 81$
 b) $x+2\sqrt{8} = x+1\sqrt{4}$
 c) $81 \cdot 9^x - 3 \cdot 9^{2x} + 3^{2x-2} - 3 = 0$

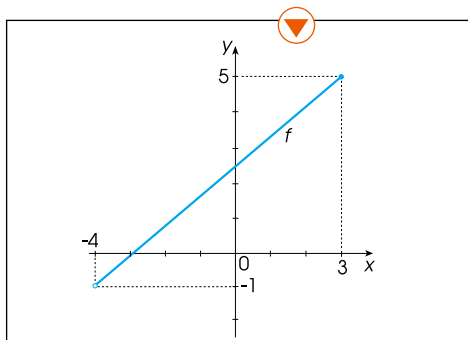
4.10 Řešte v $\mathbf{R}$:

- a) $\log(x+1) = 2$
 b) $\log_2 \sqrt{x+2} + \log_2 \sqrt{x-1} = 1$
 c) $\frac{\log(x+5)}{\log(2x+13)} = \frac{1}{2}$

Test 4

4.1 Popište definiční rovnici funkci f , která vyjadřuje závislost poloměru r kružnice vepsané do čtverce na délce strany čtverce a .

4.2 Rozhodněte, zda graf vyjadřuje funkci. Pokud ano, popište ji definiční rovnici a určete její definiční obor a obor hodnot.



4.3 Vyberte tvrzení, která nejsou pravdivá:

- a) Funkce $f: y = x^2 - 2x + 1$ má maximum v bodě $x_0 = 1$.
 b) Funkce $f: y = x^2 - 2x + 1$ je omezená zdola.
 c) Funkce $f: y = x^2 - 2x + 1$ je sudá.
 d) Funkce $f: y = x^2 - 2x + 1$ je prostá.
 e) Funkce $f: y = x^2 - 2x + 1$ je inverzní k funkci $g: y = \sqrt{x^2 - 2x - 1}$.

4.11 Řešte v $\mathbf{R}$:

- a) $x^{\log x} = 10^9$
 b) $\ln e^x = 10^0$

4.12 Určete průsečíky grafů funkcí f a g :

- a) $f: y = 7^x + 23$; $g: y = 7 \cdot 7^x - 19$
 b) $f: y = x^{2\log x + 1}$; $g: y = 100 \cdot x^{\log x}$

4.4 Vyberte tvrzení, která jsou pravdivá:

- a) Funkce $f: y = e^{-x}$ je inverzní k funkci $g: y = \ln(-x)$.
 b) Funkce $f: y = e^{-x}$ je klesající.
 c) Funkce $f: y = e^{-x}$ je omezená zdola.
 d) Funkce $f: y = e^{-x}$ je lichá.
 e) Funkce $f: y = e^{-x}$ je periodická.

4.5 Určete $x \in \mathbf{R}$, pro která platí: $\left(\frac{1}{x}\right) < x$

4.6 Vyberte pravdivé tvrzení:

- a) Grafem funkce $f: y = \frac{4-x}{2+x}$ je hyperbola s vrcholem $[-2; -1]$.
 b) Grafem funkce $f: y = \frac{4-x}{2+x}$ je hyperbola se středem $[-2; -1]$.
 c) Grafem funkce $f: y = \frac{4-x}{2+x}$ je hyperbola se středem $[4; -2]$.
 d) Grafem funkce $f: y = \frac{4-x}{2+x}$ není hyperbola.

4.7 Určete $a \in \mathbf{R}$ tak, aby platilo: $a^{7/4} < a^{3/4}$

4.8 Určete souřadnice průsečíků grafů funkcí f a g :

$$f: y = \left(\frac{1}{2}\right)^x, \quad g: y = 4$$

4.9 Určete definiční obor funkce $f: y = \log_3 \sqrt{x+2}$

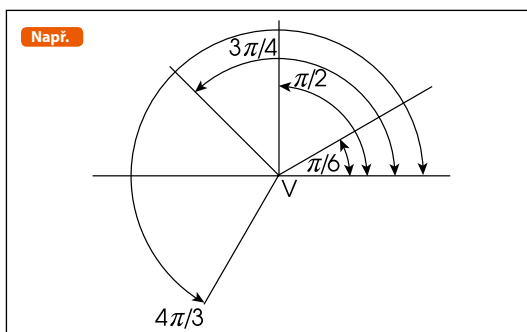
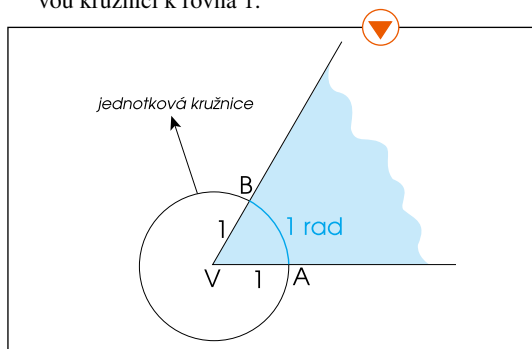
4.10 Určete $x \in \mathbf{R}$ tak, aby platilo:

$$2 \ln(x+1) = \ln 2(x+5)$$

5. Goniometrie

5.1 VELIKOST ÚHLŮ V MÍŘE OBLOUKOVÉ A STUPŇOVÉ

- V goniometrii se úhly měří zpravidla v **míře obloukové** (jednotka radián, značka rad) a v **míře stupňové** (jednotka stupeň, značka °).
- Je-li dána **jednotková kružnice** k se středem ve vrcholu V úhlu $\widehat{AVB}$, má úhel $\widehat{AVB}$ v **obloukové míře** velikost **1 radián** (1 rad) právě, když je délka kružnicového oblouku $\widehat{AB}$, který je průnikem úhlu $\widehat{AVB}$ s jednotkovou kružnicí k rovna 1.



zapamatuj si

Jelikož délce celé jednotkové kružnice 2π v **míře obloukové** odpovídá plný úhel 360° v **míře stupňové**, platí: plný úhel = 2π rad = 360° .

$$\text{Tedy: } 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad a } 1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \doteq 57^\circ 17' 45''$$

- Na obrázku jsou znázorněny úhly o velikostech $\pi/6$; $\pi/2$; $3\pi/4$ a $4\pi/3$.
- Je-li α číselná hodnota úhlu ve stupních, x číselná hodnota téhož úhlu v radiánech, pak z přímé úměrnosti

$$\text{dostaneme: } \alpha^\circ = \frac{x \cdot 180^\circ}{\pi} \text{ a } x = \frac{\alpha^\circ \cdot \pi}{180^\circ}$$



Např. Platí: $\alpha = 30^\circ \dots x = \frac{\pi}{6}$

$$\alpha = 45^\circ \dots x = \frac{\pi}{4}$$

$$\alpha = 225^\circ \dots x = \frac{5\pi}{4}$$

$$x = \frac{\pi}{12} \dots \alpha = 15^\circ$$

$$x = \frac{5\pi}{3} \dots \alpha = 300^\circ$$

$$x = \frac{7\pi}{4} \dots \alpha = 315^\circ$$

- V praxi se velikost úhlu považuje za veličinu, proto se k číselné hodnotě vyjadřující velikost úhlu připojuje značka úhlové jednotky (Např. 60°). U údajů v obloukové míře lze značku rad vynechat. (Např. $\pi/3$ rad lze psát $\pi/3$).
- Platí: Úhlový **stupeň** (°) se dělí na 60 úhlových **minut** (') a úhlová minuta na 60 úhlových **vteřin** ("):

$$1^\circ = 60' = 3600''.$$

Např. $5^\circ 30' = 330'$, $10^\circ 2' 15'' = 36135''$, $20,5^\circ = 20^\circ 30' = 1230'$

5.2. ORIENTOVANÝ ÚHEL

Orientovaným úhlem AVB (stručně $\widehat{AVB}$) nazýváme uspořádanou dvojici polopřímek VA, VB se společným počátkem V , kde VA je **počáteční rameno**, VB **koncové rameno** a bod V **vrchol orientovaného úhlu**.

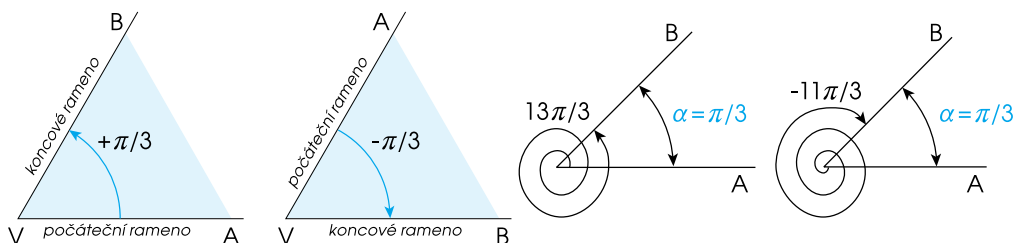
- Při $VA \neq VB$ je tedy $\widehat{AVB} \neq \widehat{BVA}$.



zapamatuj si

- Dohoda:

Otáčí-li se počáteční rameno VA kolem vrcholu V tak, aby splynulo s koncovým ramenem **ve směru pohybu hodinových ručiček**, bude hodnota úhlu **záporná**, v opačném případě kladná (viz obrázek).



- **Základní velikost orientovaného úhlu** $\widehat{AVB}$ je velikost neorientovaného úhlu α , jehož všemi body proběhne počáteční rameno VA při otočení do polohy koncového ramena VB v kladném smyslu.

- **Velikostí orientovaného úhlu**

je ve stupňové míře: $|\widehat{AVB}| = \alpha + k \cdot 360^\circ \wedge \alpha \in \langle 0; 360^\circ \rangle, k \in \mathbb{Z}$

v obloukové míře: $|\widehat{AVB}| = \alpha + k \cdot 2\pi \text{ rad} \wedge \alpha \in \langle 0; 2\pi \rangle, k \in \mathbb{Z}$

Např.

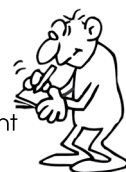
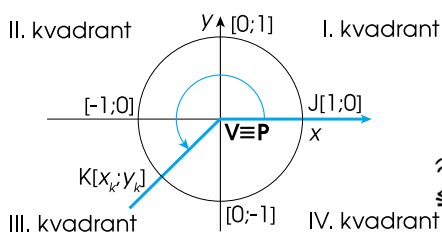
- a) Orientovaný úhel o velikosti 735° má základní velikost 15° ,

$$\text{neboť } 735^\circ = 15^\circ + 2 \cdot 360^\circ \left(\text{resp. } \frac{49\pi}{12} = \frac{\pi}{12} + 2 \cdot 2\pi \right)$$

- b) Obdobně: $-3060^\circ = 180^\circ - 9 \cdot 360^\circ \left(\text{resp. } -\frac{51\pi}{3} = \pi - 9 \cdot 2\pi \right) \Rightarrow \text{Základní velikost je } 180^\circ \text{ (resp. } \pi \text{)}.$

poznámka

Pro práci s goniometrickými funkcemi budeme zpravidla umísťovat orientovaný úhel $\widehat{JK}$ tak, aby jeho vrchol V splynul s počátkem P kartézské soustavy souřadnic P_{xy} a počáteční rameno VJ směřovalo v kladném směru osy x . Bod K koncového ramena VK pak má souřadnice $K[x_k; y_k]$.

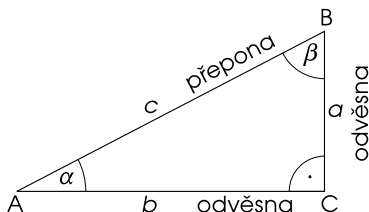


5.3. GONIOMETRICKÉ FUNKCE OSTRÉHO ÚHLU

- Funkce sinus (sin), kosinus (cos), tangens (tg) a kotangens (cotg) se označují společným názvem **goniometrické funkce**.

zapamatuj si

- **Definice:** V pravoúhlém trojúhelníku s přeponou AB o délce **c**, odvěsnou BC o délce **a** a odvěsnou AC o délce **b** **pro ostrý úhel** $\sphericalangle$ CAB o velikosti α platí:



$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{délka protilehlé odvěsny}}{\text{délka přepony}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{délka protilehlé odvěsny}}{\text{délka přilehlé odvěsny}}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{délka přilehlé odvěsny}}{\text{délka přepony}}$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{délka přilehlé odvěsny}}{\text{délka protilehlé odvěsny}}$$

- Z výše uvedených vztahů vyplývá pro ostrý úhel α : $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{cotg} \alpha}$.

- Základní hodnoty goniometrických funkcí lze odvodit z pravoúhlých trojúhelníků pomocí výše uvedených definic:

Např.

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \left(= \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} \right)$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

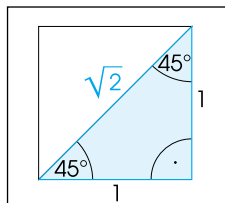
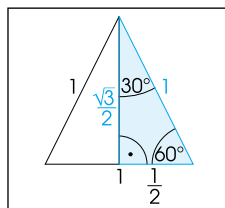
$$\operatorname{cotg} 30^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \quad \left(= \frac{\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{1}{\operatorname{tg} 30^\circ} \right)$$

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$$

$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{cotg} 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$$



zapamatuj si

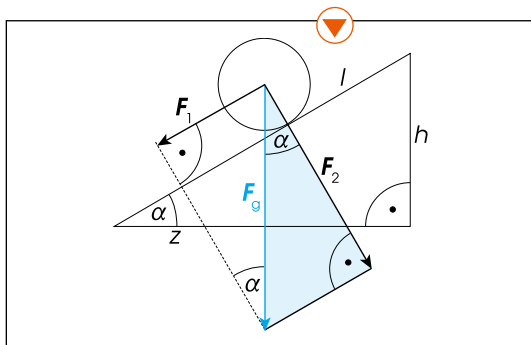
Tabulka základních hodnot goniometrických funkcí:

α	$0^\circ (0)$	$30^\circ (\pi/6)$	$45^\circ (\pi/4)$	$60^\circ (\pi/3)$	$90^\circ (\pi/2)$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\times$
$\operatorname{cotg} \alpha$	$\times$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

- Hodnoty goniometrických funkcí určujeme pomocí tabulek, popř. kalkulatoru (viz návod).
- Řešení pravoúhlého trojúhelníku používáme často v praxi (viz dále uvedené příklady).

Např.

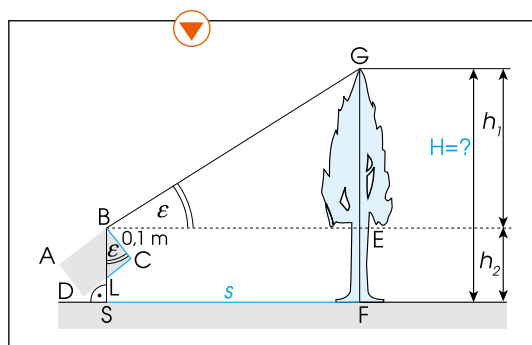
■ Nakloněná rovina



$$|F_1| = |F_g| \cdot \sin \alpha = |F_g| \cdot \frac{h}{l}$$

$$|F_2| = |F_g| \cdot \cos \alpha = |F_g| \cdot \frac{z}{l}$$

■ Určení výšky

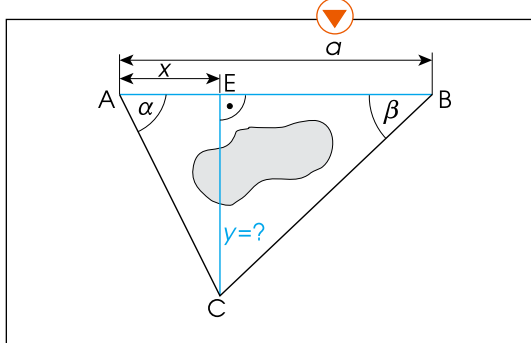


Změříme

h_2 , s , $\angle CL$, ϵ a pak vypočteme: $H = h_1 + h_2$:

$$H = s \cdot \tan \epsilon + h_2 \Rightarrow H = s \cdot \frac{|\angle CL|}{0,1} + h_2$$

■ Vzdálenost nepřístupného místa



Ze známých vzdáleností a , x a z úhlů α , β plyne:

$$\left. \begin{aligned} |EC| &= x \cdot \tan \alpha \\ |EC| &= (a - x) \tan \beta \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{platí:}$$

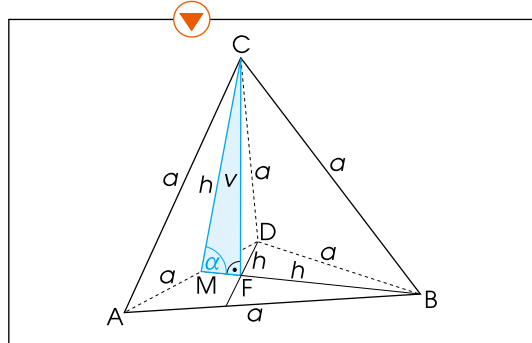
$$x \cdot \tan \alpha = (a - x) \tan \beta$$

$$x \cdot \tan \alpha + x \cdot \tan \beta = a \cdot \tan \beta$$

$$x = \frac{a \cdot \tan \beta}{\tan \alpha + \tan \beta}$$

$$\text{Tedy: } y = |EC| = \frac{a \cdot \tan \beta}{\tan \alpha + \tan \beta} \cdot \tan \alpha$$

■ Stereometrie



(např. odchylka stěn TETRAEDRU = pravidelného čtyřstěnu)

$$h = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \sqrt{3}$$

$$|MF| = \frac{h}{3}$$

$$\cos \alpha = \frac{\frac{h}{3}}{h} = \frac{1}{3}$$

$$\alpha \doteq 70^\circ 31' 44''$$

5.4. ROZŠÍŘENÍ DEFINIC GONIOMETRICKÝCH FUNKCÍ

- Definici goniometrických funkcí $\sin$ a $\cos$ ostrého úhlu α lze rozšířit i na goniometrické funkce, jejichž **definčním oborem bude množina $\mathbf{R}$ všech reálných čísel**. Funkční hodnoty funkcí sinus a kosinus orientovaného úhlu $\widehat{JVK}$ budeme definovat pomocí kartézských souřadnic průsečíku $K[x_k, y_k]$ koncového ramene tohoto úhlu (jehož vrchol V leží v počátku soustavy souřadnic P_{xy} a počáteční rameno splývá s kladnou částí osy x) s jednotkovou kružnicí takto:

$$\sin \alpha = y_k, \quad \cos \alpha = x_k, \quad \text{kde } \alpha \text{ je velikost orientovaného úhlu } \widehat{JVK} \text{ a } x_k, y_k \text{ souřadnice bodu } K$$

- Pomocí funkcí sinus a kosinus definujeme ostatní goniometrické funkce:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{y_k}{x_k} \quad \text{pro } \forall \alpha \in \{\alpha \in \mathbf{R} \wedge \alpha \neq (2k+1)\pi/2; k \in \mathbf{Z}\}$$

(Hodnoty lze určit graficky pomocí tečny hodnot funkce tangens.)

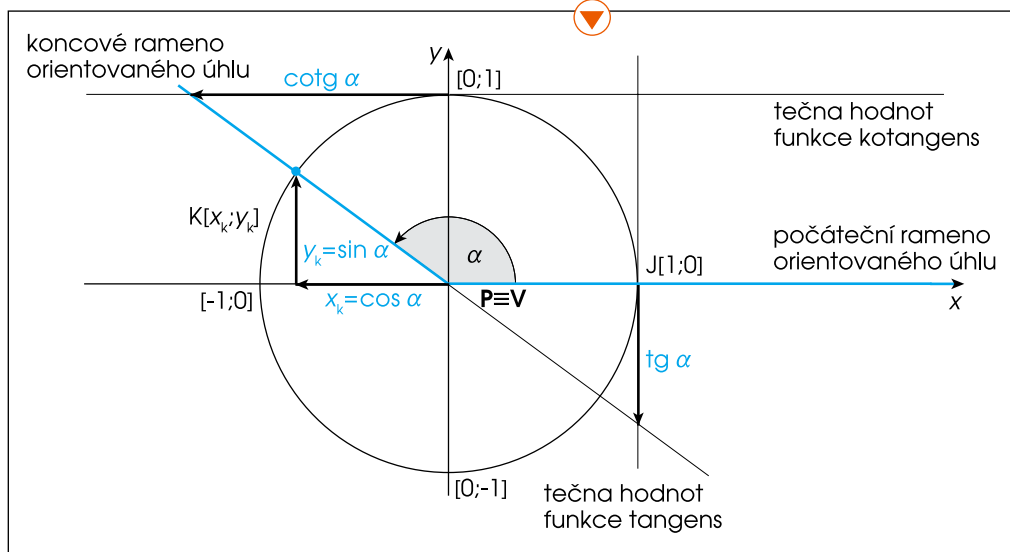
$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{x_k}{y_k} \quad \text{pro } \forall \alpha \in \{\alpha \in \mathbf{R} \wedge \alpha \neq k\pi; k \in \mathbf{Z}\}$$

(Hodnoty lze určit graficky pomocí tečny hodnot funkce kotangens.)

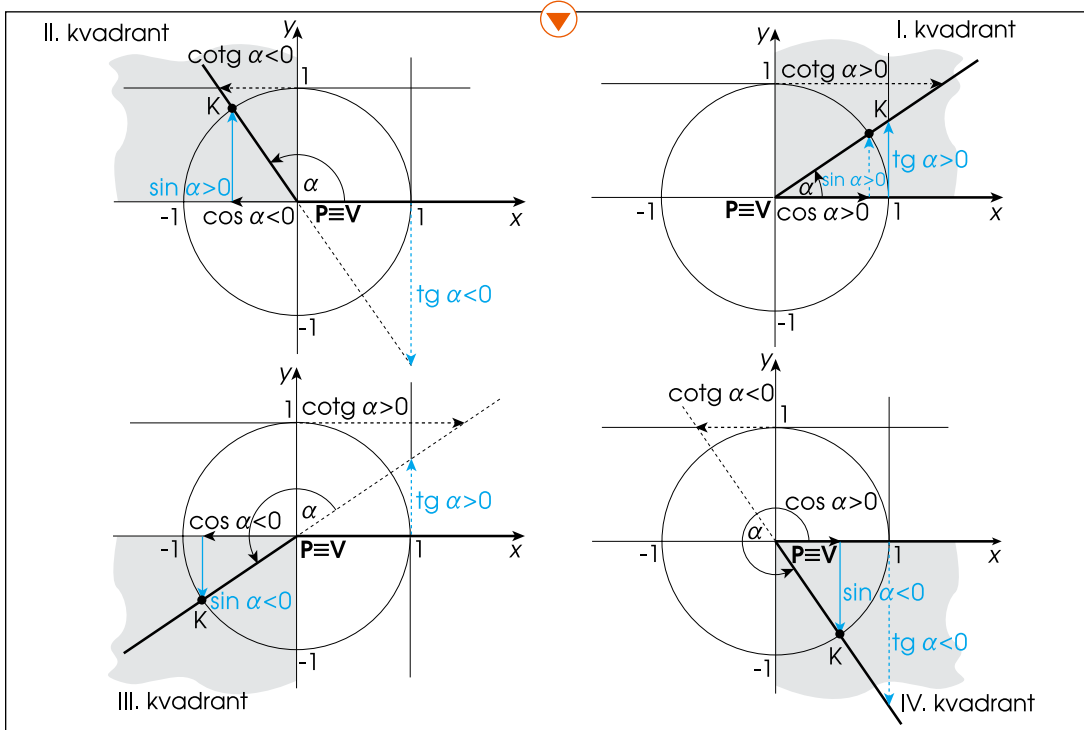


zapamatuj si

- Zavedení goniometrických funkcí orientovaného úhlu:



■ **Znaménka hodnot** jednotlivých funkcí v kvadrantech určíme názorně z grafů, popř. z definic:



Např.	$\sin \frac{\pi}{6} > 0$,	$\cos \left(-\frac{11\pi}{6}\right) > 0$,	$\tg \frac{\pi}{6} > 0$,	$\cotg \frac{13\pi}{6} > 0$	... I. kvadrant
	$\sin \frac{3\pi}{4} > 0$,	$\cos \frac{11\pi}{4} < 0$,	$\tg \left(-\frac{7\pi}{6}\right) < 0$,	$\cotg \frac{19\pi}{4} < 0$	... II. kvadrant
	$\sin \left(-\frac{3\pi}{4}\right) < 0$,	$\cos \frac{7\pi}{3} < 0$,	$\tg \frac{13\pi}{3} > 0$,	$\cotg \left(-\frac{2\pi}{3}\right) > 0$	... III. kvadrant
	$\sin \frac{15\pi}{8} < 0$,	$\cos \left(-\frac{\pi}{4}\right) > 0$,	$\tg \left(-\frac{\pi}{11}\right) < 0$,	$\cotg \frac{15\pi}{4} < 0$	... IV. kvadrant

■ V geometrických a trigonometrických úlohách se z tradičních důvodů zpravidla užívá stupňová míra a argumenty goniometrických funkcí se značí písmeny řecké abecedy (např. $\sin 60^\circ$, $\sin \alpha$). V matematické analýze a výpočetní technice bývá preferován argument v míře obloukové (reálné číslo bez označení rad) a zapisuje se ve tvaru např. $y = \sin x$, $y = \sin 2\pi$, $y = \sin 5$ atd.

a) $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

$$\sin \frac{5\pi}{6} = \sin \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\sin \frac{7\pi}{6} = \sin \left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\sin \frac{11\pi}{6} = \sin \left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\sin \frac{49\pi}{6} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\sin \frac{53\pi}{6} = \sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\sin \frac{55\pi}{6} = \sin \frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\sin \frac{59\pi}{6} = \sin \frac{11\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

b) $\tg \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$

$$\tg \frac{5\pi}{6} = -\sqrt{3}$$

$$\tg \frac{7\pi}{6} = \sqrt{3}$$

$$\tg \frac{11\pi}{6} = -\sqrt{3}$$

$$\tg \frac{49\pi}{6} = \tg \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$$

$$\tg \frac{53\pi}{6} = \tg \frac{5\pi}{6} = -\sqrt{3}$$

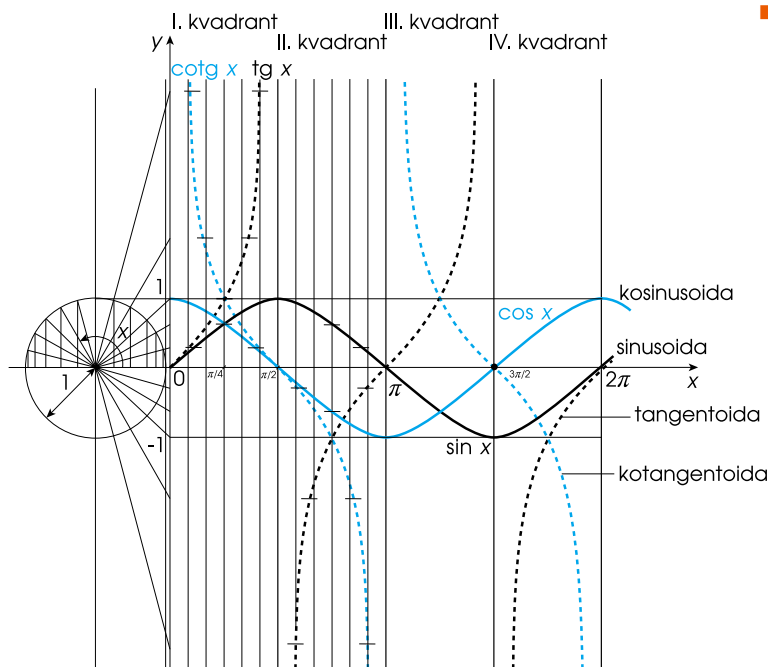
$$\tg \frac{55\pi}{6} = \tg \frac{7\pi}{6} = \sqrt{3}$$

$$\tg \frac{59\pi}{6} = \tg \frac{11\pi}{6} = -\sqrt{3}$$

5.5. VLASTNOSTI GONIOMETRICKÝCH FUNKCÍ

zapamatuj si

■ Na základě definice goniometrických funkcí lze sestavit jejich grafy a odvodit vlastnosti:



	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{cotg} x$
Definiční obor	$x \in \mathbf{R}$	$x \in \mathbf{R}$	$x \in \mathbf{R} - \{(2k+1)\frac{\pi}{2}\} \wedge k \in \mathbf{Z}$	$x \in \mathbf{R} - \{2k\frac{\pi}{2}\} \wedge k \in \mathbf{Z}$
Obor hodnot	$y \in (-1; 1)$	$y \in (-1; 1)$	$y \in \mathbf{R}$	$y \in \mathbf{R}$
Sudost, lichost	lichá $\sin(-x) = -\sin x$	sudá $\cos(-x) = \cos x$	lichá $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$	lichá $\operatorname{cotg}(-x) = -\operatorname{cotg} x$
Funkce roste	$x \in (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi) \wedge k \in \mathbf{Z}$	$x \in (\pi + 2k\pi; 2\pi + 2k\pi) \wedge k \in \mathbf{Z}$	$x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi) \wedge k \in \mathbf{Z}$	---
Funkce klesá	$x \in (\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi) \wedge k \in \mathbf{Z}$	$x \in (2k\pi; \pi + 2k\pi) \wedge k \in \mathbf{Z}$	---	$x \in (k\pi; \pi + k\pi) \wedge k \in \mathbf{Z}$
Omezenost	omezená v celém definičním oboru zdola i shora	omezená v celém definičním oboru zdola i shora	funkce není omezená ani zdola, ani shora	funkce není omezená ani zdola, ani shora
Maximum, minimum	$\max [\pi/2 + 2k\pi; 1]$ $\min [3\pi/2 + 2k\pi; -1] \wedge k \in \mathbf{Z}$	$\max [2k\pi; 1]$ $\min [\pi + 2k\pi; -1] \wedge k \in \mathbf{Z}$	neexistuje	neexistuje
Periodičnost	základní perioda 2π $\sin x = \sin(x + 2k\pi) \wedge k \in \mathbf{Z}$	základní perioda 2π $\cos x = \cos(x + 2k\pi) \wedge k \in \mathbf{Z}$	základní perioda π $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + k\pi) \wedge k \in \mathbf{Z}$	základní perioda π $\operatorname{cotg} x = \operatorname{cotg}(x + k\pi) \wedge k \in \mathbf{Z}$
Spojitosť	spojitá v $\mathbf{R}$	spojitá v $\mathbf{R}$	není definováno pro $x = (2k+1)\frac{\pi}{2} \wedge k \in \mathbf{Z}$	není definováno pro $x = 2k\frac{\pi}{2} \wedge k \in \mathbf{Z}$

5.6. GRAFICKÉ ZNÁZORNĚNÍ SINUSOVÝCH FUNKCÍ

- V aplikacích se sinusové funkce vyskytují nejčastěji ve tvaru: $y = a \cdot \sin(\omega t + \varphi)$, který představuje **rovnici harmonického pohybu**. Z fyziky víme, že harmonický pohyb lze znázornit průmětem průvodiče při rovnoměrném kruhovém pohybu do průměru (viz obr.) přičemž:

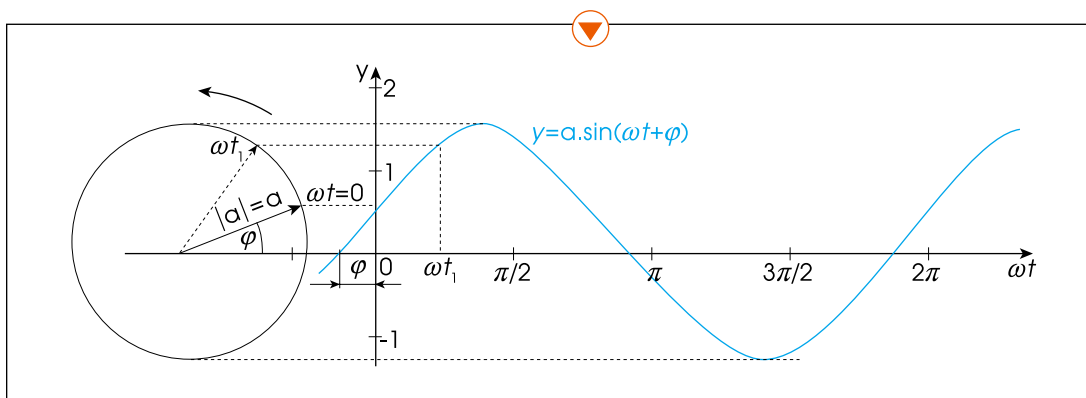
a je **délka průvodiče (amplituda)**

ω je **kruhová frekvence**, tj. úhel, o který se otočí průvodič za 1 sekundu

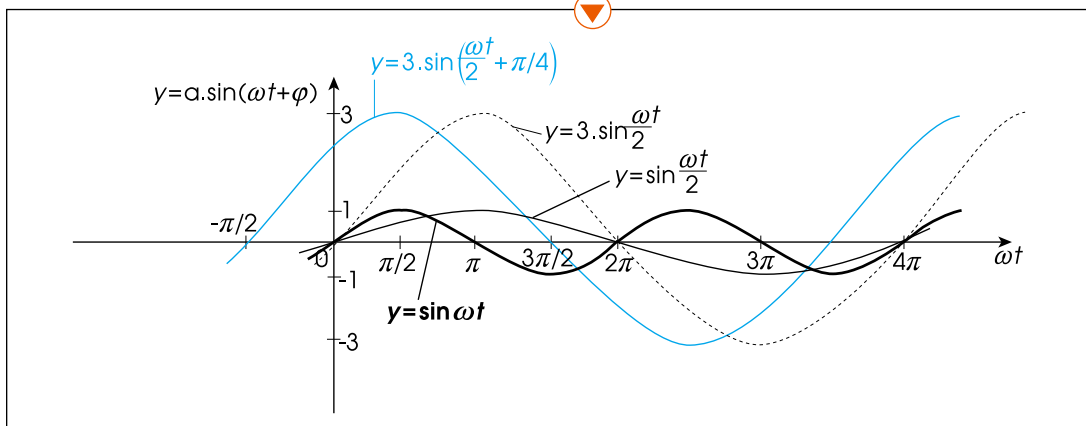
$x = \omega t$; ($T = \frac{2\pi}{\omega}$ je **perioda**, tj. doba jedné otáčky (cyklu) průvodiče)

φ je **fázový posun** vzhledem k promítací ose při $x = 0$ (resp. $t = 0$)

$f = \frac{1}{T}$ je **frekvence**, která udává počet cyklů za 1 s



Např. Konkrétní průběh funkcí ve srovnání se základní funkcí $f: y = \sin x$.



- Obdobně lze získat průběh funkcí odvozených od goniometrických funkcí kosinus, tangens a kotangens.

5.7. VZTAHY MEZI GONIOMETRICKÝMI FUNKCEMI

VZTAHY MEZI GONIOMETRICKÝMI FUNKCEMI DOPLŇKOVÝCH ÚHLŮ

■ Pomocí jednotkové kružnice, popř. z grafů goniometrických funkcí můžeme vyvodit tyto vztahy:

$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ $\operatorname{tg} x = \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ $\operatorname{cotg} x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

Např. $\sin 60^\circ = \cos(90^\circ - 60^\circ) = \cos 30^\circ$
 $\cos 30^\circ = \sin(90^\circ + 30^\circ) = \sin 120^\circ$
 $\operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{cotg}(90^\circ - 60^\circ) = \operatorname{cotg} 30^\circ$
 $\operatorname{cotg} 15^\circ = \operatorname{tg}(90^\circ - 15^\circ) = \operatorname{tg} 75^\circ$

$\sin \frac{\pi}{3} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{6}$
 $\cos \frac{\pi}{6} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{3}$
 $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{cotg} \frac{\pi}{6}$
 $\operatorname{cotg} \frac{\pi}{2} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = \operatorname{tg} \frac{5\pi}{12}$

■ Každou goniometrickou funkci libovolného argumentu x (pro který je definována) lze převést na funkci argumentu $\alpha \in \langle 0; \pi/2 \rangle$:

Funkce s argumentem x	$-\alpha$	$\frac{\pi}{2} \pm \alpha$	$\pi \pm \alpha$	$\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$	$2\pi - \alpha$
$\sin x$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\mp \sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$
$\cos x$	$\cos \alpha$	$\mp \sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\pm \sin \alpha$	$\cos \alpha$
$\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\mp \operatorname{cotg} \alpha$	$\pm \operatorname{tg} \alpha$	$\mp \operatorname{cotg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
$\operatorname{cotg} x$	$-\operatorname{cotg} \alpha$	$\mp \operatorname{tg} \alpha$	$\pm \operatorname{cotg} \alpha$	$\mp \operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{cotg} \alpha$

Např. $\sin \frac{5\pi}{6} = \sin\left(\pi - \frac{5\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$
 $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{4} = \operatorname{tg}\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$

$\cos \frac{5\pi}{3} = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$
 $\operatorname{cotg} \frac{11\pi}{6} = \operatorname{cotg}\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{cotg} \frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}$

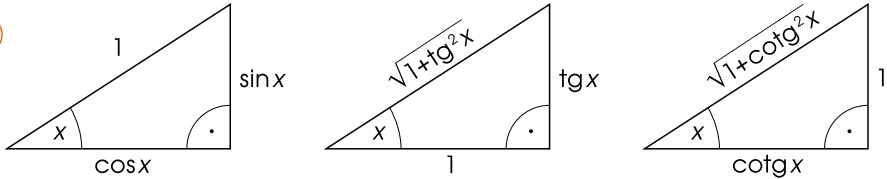
VZTAHY MEZI FUNKCEMI STEJNÉHO ARGUMENTU

■ Pro přípustná x platí:

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{cotg} x}$

$|\sin x| = \frac{|\operatorname{tg} x|}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}$ $|\cos x| = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}$ $|\sin x| = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2 x}}$ $|\cos x| = \frac{|\operatorname{cotg} x|}{\sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2 x}}$

Pomůcka:



SOUČTOVÉ VZORCE

- Pro každé $x, y \in \mathbb{R}$, pro která jsou funkce definovány, platí:

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$$

$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$$

poznámka

Vztahy lze vyvodit např. z definice funkcí a jejich znázornění pomocí jednotkové kružnice.



$$\operatorname{cotg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{cotg} x \cdot \operatorname{cotg} y \mp 1}{\operatorname{cotg} y \pm \operatorname{cotg} x}$$

$$\sin(x + y) \cdot \sin(x - y) = \cos^2 y - \cos^2 x$$

$$\cos(x + y) \cdot \cos(x - y) = \cos^2 y - \sin^2 x$$

Např. $\sin \frac{\pi}{12} = \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) = \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} - 1)$

$$\operatorname{tg} \frac{5\pi}{12} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = 2 + \sqrt{3}$$

$$\cos 2x = \cos(x+x) = \cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

VZORCE PRO DVOJNÁSOBEK A POLOVINU ARGUMENTU

- Z výše uvedeného příkladu vyplývá odvození vztahů pro dvojnásobek argumentu:

$$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

Pro přípustné hodnoty platí:

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2}{\operatorname{cotg} x - \operatorname{tg} x} = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

$$\operatorname{cotg} 2x = \frac{\operatorname{cotg} x - \operatorname{tg} x}{2} = \frac{\operatorname{cotg}^2 x - 1}{2 \operatorname{cotg} x}$$

Např. $\sin \frac{\pi}{3} = 2 \sin \frac{\pi}{6} \cdot \cos \frac{\pi}{6} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \frac{2}{\operatorname{cotg} \frac{\pi}{6} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}} = \frac{2}{\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3}$$

$$\cos \frac{\pi}{3} = \cos^2 \frac{\pi}{6} - \sin^2 \frac{2\pi}{6} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{cotg} \frac{\pi}{3} = \frac{\operatorname{cotg} \frac{\pi}{6} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Dále platí: $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - \sin^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x \Rightarrow |\sin x| = \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{2}}$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - 1 + \cos^2 x = 2 \cos^2 x - 1 \Rightarrow |\cos x| = \sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}}$$

- Pro přípustné hodnoty dostaneme:

$$\left| \sin \frac{x}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

$$\left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$$

$$\left| \cos \frac{x}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

$$\left| \operatorname{cotg} \frac{x}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}} = \frac{\sin x}{1 - \cos x} = \frac{1 + \cos x}{\sin x}$$

Např. $\sin \frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\pi}{6}}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{\frac{3}{2}}}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$

$$\cos \frac{\pi}{6} = \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{3}}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{1 + \cos \frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{cotg} \frac{\pi}{6} = \frac{1 + \cos \frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{1 + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3}$$

SOUČTY A ROZDÍLY GONIOMETRICKÝCH FUNKCÍ

■ Pro přípustné hodnoty x, y platí:

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cdot \cos y}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\operatorname{cotg} x \pm \operatorname{cotg} y = \frac{\sin(y \pm x)}{\sin x \cdot \sin y}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \sqrt{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \sqrt{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

Např. $\sin \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{6} = 2 \sin \frac{\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}}{2} \cdot \cos \frac{\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}}{2} = 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

$$\cos \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{6} = -2 \sin \frac{\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}}{2} \cdot \sin \frac{\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}}{2} = -2 \sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{6} = -2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)}{\cos \frac{\pi}{3} \cdot \cos \frac{\pi}{6}} = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\cos \frac{\pi}{3} \cdot \cos \frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} &= \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{2} = \sqrt{2} \cdot 1 = \sqrt{2} \\ &= \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos 0 = \sqrt{2} \cdot 1 = \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} &= \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{2} = \sqrt{2} \cdot 0 = 0 \\ &= \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \sin 0 = \sqrt{2} \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

SOUČINY GONIOMETRICKÝCH FUNKCÍ

■ Pro přípustné hodnoty x, y platí:

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2} [\cos(x-y) - \cos(x+y)]$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x-y) + \cos(x+y)]$$

$$\cos x \cdot \sin y = \frac{1}{2} [\sin(x+y) - \sin(x-y)]$$

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{\operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} y} = -\frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{\operatorname{cotg} x - \operatorname{cotg} y}$$

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} y = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} y}{\operatorname{cotg} x + \operatorname{tg} y} = -\frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} y}{\operatorname{cotg} x - \operatorname{tg} y}$$

$$\operatorname{cotg} x \cdot \operatorname{cotg} y = \frac{\operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} y}{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y} = -\frac{\operatorname{cotg} x - \operatorname{cotg} y}{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}$$

$$\operatorname{cotg} x \cdot \operatorname{cotg} y = \frac{\operatorname{cotg} x + \operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} y} = -\frac{\operatorname{cotg} x - \operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} y}$$

poznámka

V praxi se užívají i další vztahy, které lze vyhledat v tabulkách, popř. odvodit.



$$\text{Např. } \sin \frac{\pi}{3} \cdot \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) - \cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \right) \right] = \frac{1}{2} \left[\cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{2} \right] = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 0 \right) = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\cos \frac{\pi}{3} \cdot \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \left[\sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \right) - \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) \right] = \frac{1}{2} \left[\sin \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{6} \right] = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} \cotg \frac{\pi}{3} \cdot \cotg \frac{\pi}{6} &= \frac{\cotg \frac{\pi}{3} + \cotg \frac{\pi}{6}}{\tg \frac{\pi}{3} + \tg \frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3}}{\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}} = 1 \\ &= - \frac{\cotg \frac{\pi}{3} - \cotg \frac{\pi}{6}}{\tg \frac{\pi}{3} - \tg \frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3}}{\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}} = 1 \end{aligned}$$

$$\text{Např. } \cos nx = \cos^n x - \binom{n}{2} \cos^{n-2} x \cdot \sin^2 x + \binom{n}{4} \cos^{n-4} x \cdot \sin^4 x - \dots$$

$$\cos 4x = \cos^4 x - \binom{4}{2} \cos^2 x \cdot \sin^2 x + \sin^4 x = \cos^4 x - 6 \cos^2 x \cdot \sin^2 x + \sin^4 x$$

$$\text{Např. } \sin nx = \binom{n}{1} \cos^{n-1} x \cdot \sin x - \binom{n}{3} \cos^{n-3} x \cdot \sin^3 x + \binom{n}{5} \cos^{n-5} x \cdot \sin^5 x - \dots$$

$$\sin 4x = 4 \cos^3 x \cdot \sin x - 4 \cos x \cdot \sin^3 x$$

5.8. GONIOMETRICKÉ ROVNICE

Goniometrickými rovnicemi nazýváme rovnice, které kromě konstant obsahují neznámou x nebo výrazy s neznámou x jako argumenty jedné nebo několika goniometrických funkcí, tj. rovnice tvaru: $f(\sin x, \cos x, \tg x, \cotg x, x) = 0$.

Základní goniometrickou rovnicí s neznámou x je rovnice tvaru $f(x) = c$, kde f je goniometrická funkce, c je reálné číslo.

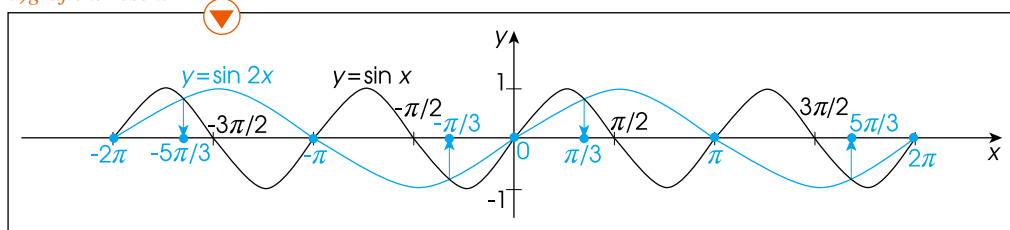


poznámka

- ① Goniometrické rovnice řešíme **numericky** nebo **graficky**.
- ② Při numerickém řešení převedeme goniometrické funkce s případnými různými argumenty na funkce s tímž argumentem a získáme základní goniometrické rovnice. Dále postupujeme takto:
 - I. Najdeme *pomocné řešení* x' rovnice $f(x') = |c|$, ležící v intervalu $\langle 0; \pi/2 \rangle$. Takové řešení je nejvýše jedno, neboť každá goniometrická funkce je v tomto intervalu monotónní. (Pokud neexistuje x' , které vyhovuje rovnici $f(x') = |c|$ je řešením goniometrické rovnice prázdná množina).
 - II. Je-li rovnice $f(x') = |c|$ řešitelná v intervalu $\langle 0; \pi/2 \rangle$, určíme *obecné řešení* původní rovnice (nejprve v periodě, pak v celém definičním oboru, popř. pro x ze zadaného intervalu).
 - III. Řešení ověříme dosazením do výchozí rovnice a zapíšeme výsledek.

Např. Řešte pro $x \in \langle -2\pi; 2\pi \rangle$: $\sin 2x = \sin x$.

a) grafické řešení



$$K = \left\{ -2\pi; -\frac{5\pi}{3}; -\pi; -\frac{\pi}{3}; 0; \frac{\pi}{3}; \pi; \frac{5\pi}{3}; 2\pi \right\}$$

b) numerické řešení

$$\sin 2x = \sin x \Rightarrow 2 \sin x \cos x - \sin x = 0 \Rightarrow \sin x \cdot (2 \cos x - 1) = 0$$

I. Pomocné řešení:

(I. kvadrant)

$$\begin{aligned} \sin x &= 0 \\ \sin x'_1 &= |0| \\ x'_1 &= 0 \end{aligned}$$

nebo

$$\begin{aligned} 2 \cos x - 1 &= 0 \\ \cos x'_2 &= \left| \frac{1}{2} \right| \\ x'_2 &= \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

II. Řešení pro $x \in \langle -2\pi; 2\pi \rangle$:

$$K_1 = \{-2\pi; -\pi; 0; \pi; 2\pi\}$$

$$K_2 = \left\{ -\frac{5\pi}{3}; -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3} \right\}$$

$$\text{III. Výsledek: } K = K_1 \cup K_2 = \left\{ -2\pi; -\frac{5\pi}{3}; -\pi; -\frac{\pi}{3}; 0; \frac{\pi}{3}; \pi; \frac{5\pi}{3}; 2\pi \right\}$$

Např. Řešte numericky v $\mathbf{R}$: $7 \cos x + 2 \sin^2 x - 5 = 0$.

$$7 \cos x + 2(1 - \cos^2 x) - 5 = 0 \Rightarrow 2 \cos^2 x - 7 \cos x + 3 = 0$$

$$(\cos x)_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4} = \begin{matrix} 3 \\ 1/2 \end{matrix}$$

$$\cos x_1 = 3$$

I. Pomocné řešení: $\cos x'_1 = |3| \Rightarrow x'_1$ neexistuje

II. Obecné řešení (I. kvadrant): $K_1 = \emptyset$

$$\text{III. Výsledek (v } \mathbf{R} \text{): } K = K_1 \cup K_2 = \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \right\} \wedge k \in \mathbf{Z}$$

$$\cos x_2 = \frac{1}{2}$$

$$\cos x'_2 = \left| \frac{1}{2} \right| \Rightarrow x'_2 = \frac{\pi}{3}$$

$$K_2 = \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \right\} \wedge k \in \mathbf{Z}$$

Např. Řešte numericky v $\mathbf{R}$: $2 \sin x \cos x = \cos 3x \cdot \sin 2x$.

$$\sin 2x - \cos 3x \sin 2x = 0 \Rightarrow \sin 2x \cdot (1 - \cos 3x) = 0$$

$$\sin 2x_1 = 0$$

nebo

$$1 - \cos 3x_2 = 0$$

I. Pomocné řešení: $\sin 2x'_1 = |0|$

$$2x'_1 = 0$$

$$\cos 3x'_2 = |1|$$

$$3x'_2 = 0$$

II. Obecné řešení: $2x_1 = 0 + k\pi \Rightarrow x_1 = k \cdot \frac{\pi}{2} \wedge k \in \mathbf{Z}$

$$K_1 = \left\{ k \cdot \frac{\pi}{2} \right\} \wedge k \in \mathbf{Z}$$

$3x_2 = 0 + 2k\pi \Rightarrow x_2 = \frac{2k\pi}{3} \wedge k \in \mathbf{Z}$

$$K_2 = \left\{ k \cdot \frac{2\pi}{3} \right\} \wedge k \in \mathbf{Z}$$

$$\text{III. Výsledek: } K = K_1 \cup K_2 = \left\{ k \cdot \frac{2\pi}{3}; k \cdot \frac{\pi}{2} \right\} \wedge k \in \mathbf{Z}$$

Např. Řešte pro $\alpha \in \langle 0^\circ; 360^\circ \rangle$: $2 \sin \alpha + \cos \alpha = 2$.

1. způsob řešení

Rovnici převedeme na tvar $\cos \alpha = 2 - 2 \sin \alpha$. Obě strany této rovnice umocníme dvěma (***neekvivalentní úprava**) a dostaneme rovnici $\cos^2 \alpha = 4 - 8 \sin \alpha + 4 \sin^2 \alpha$ a tu dále upravujeme:

$$1 - \sin^2 \alpha = 4 - 8 \sin \alpha + 4 \sin^2 \alpha$$

$$5 \sin^2 \alpha - 8 \sin \alpha + 3 = 0$$

$$(\sin \alpha)_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-5}}{5} \nearrow \frac{1}{5} \searrow \frac{3}{5}$$

$$\text{I. } \sin \alpha'_1 = 1 \quad \sin \alpha'_2 = \left| \frac{3}{5} \right|$$

$$\alpha'_1 = 90^\circ \quad \alpha'_2 = 36^\circ 52'$$

$$\text{II. } \alpha_1 = 90^\circ \quad \alpha_{21} = 36^\circ 52'$$

$$\alpha_{22} = 143^\circ 8'$$

III. Zkouška (***nutná**) dosazením do původní rovnice zjistí, že α_{22} rovnici nevyhovuje.

Výsledek: $K = \{36^\circ 52'; 90^\circ\}$

2. způsob řešení

Rovnice typu $a \cdot \sin \alpha + b \cdot \cos \alpha = c \wedge a, b \in \mathbf{R} - \{0\}$ lze řešit pomocí **substituce** $\text{tg } \beta = b/a$.

$$2 \sin \alpha + \cos \alpha = 2 / : 2 \Rightarrow \sin \alpha + \frac{1}{2} \cos \alpha = 1$$

Po zavedení substituce $\text{tg } \beta = \frac{1}{2} \Rightarrow \beta = 26^\circ 34'$ platí: $\sin \alpha + \text{tg } \beta \cdot \cos \alpha = 1$

$$\sin \alpha + \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \cos \alpha = 1 / \cdot \cos \beta$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha = \cos \beta \Rightarrow \sin(\alpha + \beta) = \cos \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos 26^\circ 34' \Rightarrow \sin(\alpha + \beta) \doteq 0,8944$$

$$(\alpha + \beta)_1 = 63^\circ 26' \Rightarrow \alpha_1 = 36^\circ 52'$$

$$(\alpha + \beta)_2 = 116^\circ 34' \Rightarrow \alpha_2 = 90^\circ$$

Výsledek: $K = \{36^\circ 52'; 90^\circ\}$



poznámka

Ekvivalentní úpravy $\Rightarrow$ zkouška není nutná.

5.9. TRIGONOMETRICKÉ ŘEŠENÍ OBECNÉHO TROJÚHELNÍKU

Označení:

A, B, C ... vrcholy trojúhelníku ABC

α, β, γ ... velikosti vnitřních úhlů

a, b, c ... délky stran trojúhelníku

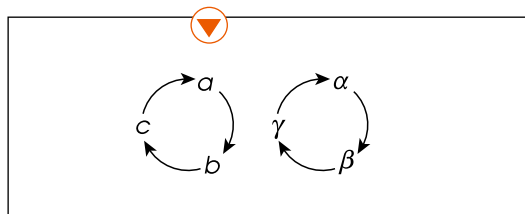
S ... obsah

O ... obvod

r ... poloměr kružnice opsané

ϱ ... poloměr kružnice vepsané

CZ ... cyklická záměna



zapamatuj si

Platí: $S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \gamma$ (CZ), $r = \frac{a}{2 \sin \alpha}$ (CZ)

Kosinová věta (sss, sus): $a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos \alpha$ (CZ)

Sinová věta (usu, Ssu): $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2r$



Tangentová věta (sus): $\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2}}$, $\operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2} = \cotg \frac{\gamma}{2}$ (CZ)

Mollweidovy a Cagnoliovy vzorce: $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-b)}{bc}}$ (CZ), $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$ (CZ)

$\sin \frac{\alpha}{2} : \cos \frac{\beta-\gamma}{2} = a : (b+c)$ (CZ), $\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$ (CZ), $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\rho}{s-a}$ (CZ)

poznámka

Složitější úlohy o trojúhelníku, ve kterých se vyskytují i další prvky (např. těžnice, výšky, osy úhlů atd.) převádíme zpravidla na úlohy o základních prvcích trojúhelníka. Trigonometrické úlohy o mnohoúhelnících i prostorových útvech (tělesech) řešíme převedením na úlohy o trojúhelnících.



Např. Určete strany a vnitřní úhly $\triangle ABC$, je-li:

$a = 81,2 \text{ cm}$, $b = 118 \text{ cm}$, $\alpha = 38^\circ 20'$.

Řešení: Protože $a > b \cdot \sin \alpha$ má úloha 2 řešení.

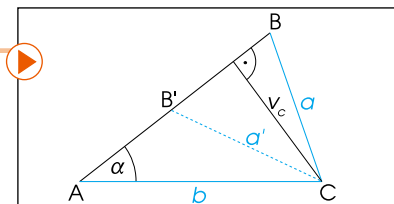
$\triangle ABC$ má zadány dvě strany a velikost úhlu ležícího proti jedné ze zadaných stran $\Rightarrow$ užijeme **sinovou větu**: $\sin \beta = \frac{b \cdot \sin \alpha}{a}$

$\sin \beta = \frac{118 \text{ cm} \cdot \sin 38^\circ 20'}{81,2 \text{ cm}} \Rightarrow \sin \beta \doteq 0,901327 \begin{cases} \beta \doteq 64^\circ 20' \wedge \gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) \doteq 77^\circ 20' \\ \beta' \doteq 115^\circ 40' \wedge \gamma' = 180^\circ - (\alpha + \beta') \doteq 26^\circ \end{cases}$

$c = \frac{a \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha} \Rightarrow c = \frac{a \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{81,2 \text{ cm} \cdot \sin 77^\circ 20'}{\sin 38^\circ 20'} \doteq 127,7 \text{ cm}$ Splněno: $\alpha < \beta < \gamma \Leftrightarrow a < b < c$

$c' = \frac{a' \cdot \sin \gamma'}{\sin \alpha'} = \frac{81,2 \text{ cm} \cdot \sin 26^\circ}{\sin 38^\circ 20'} \doteq 57,4 \text{ cm}$ $\alpha' < \beta' < \gamma' \Leftrightarrow a' < b' < c'$

Pro $\triangle ABC$ platí: $a = 81,2 \text{ cm}$, $b = 118 \text{ cm}$, $c = 127,7 \text{ cm}$, $\alpha = 38^\circ 20'$, $\beta = 64^\circ 20'$, $\gamma = 77^\circ 20'$
nebo $a' = 81,2 \text{ cm}$, $b' = 118 \text{ cm}$, $c' = 57,4 \text{ cm}$, $\alpha = 38^\circ 20'$, $\beta = 115^\circ 40'$, $\gamma = 26^\circ$.



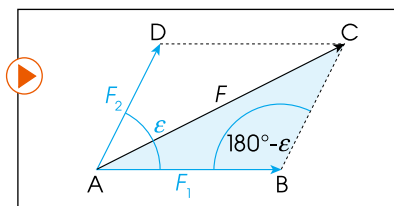
Např. Určete výslednici dvou sil $F_1 = 50 \text{ N}$, $F_2 = 35 \text{ N}$, jestliže síly svírají úhel $\varepsilon = 60^\circ$ (viz obr.).

Řešení: $\triangle ABC$ je určen podle věty sus $\Rightarrow$ užijeme kosinovou větu:

$F^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1 \cdot F_2 \cdot \cos (180^\circ - \varepsilon)$

$F = \sqrt{50^2 + 35^2 - 2 \cdot 50 \cdot 35 \cdot \cos 120^\circ} \text{ N} = \sqrt{2500 + 1225 + 1750} \text{ N} \doteq 74 \text{ N}$

Výslednice má velikost asi 74N.



Např. V trojúhelníku ABC je: $a = 12,5$ cm, $b = 5,3$ cm, $\gamma = 24^\circ 15'$. Určete vnitřní úhly trojúhelníku.

Řešení: $\triangle ABC$ je určen pomocí věty sus $\Rightarrow$ lze užít **tangentovou větu** (nebo **větu kosinovou**).

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}} &= \frac{a - b}{a + b} \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{12,5 - 5,3}{12,5 + 5,3} \operatorname{tg} \left(90^\circ - \frac{24^\circ 15'}{2} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{7,2}{17,8} \operatorname{tg} 77^\circ 52' 30'' \Rightarrow \frac{\alpha - \beta}{2} = 62^\circ 1' 33'' \\ &\Rightarrow \frac{\alpha + \beta}{2} = 77^\circ 52' 30'' \end{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 139^\circ 54' 3'' \\ \beta = 15^\circ 50' 57'' \end{array} \right.$$

Vnitřní úhly $\triangle ABC$ jsou: $\alpha = 139^\circ 54' 3''$, $\beta = 15^\circ 50' 57''$, $\gamma = 24^\circ 15'$.

Např. Určete vnitřní úhly $\triangle ABC$, je-li: $a = 52,46$ cm, $b = 39,37$ cm, $c = 45,21$ cm.

Řešení: $\triangle ABC$ je určen pomocí věty sss $\Rightarrow$ lze užít **kosinovou větu** nebo **vzorce pro poloviční úhly**.

$$\begin{aligned} \frac{s}{2} &= \frac{a + b + c}{2} = \frac{52,46 + 39,37 + 45,21}{2} \text{ cm} = 68,52 \text{ cm} \\ \sin \frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{(s - b)(s - c)}{bc}} = \sqrt{\frac{(68,52 - 39,37)(68,52 - 45,21)}{39,37 \cdot 45,21}} \doteq 0,61786 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} \doteq 38^\circ 9' 36'' \Rightarrow \alpha \doteq 76^\circ 19' 12'' \\ \sin \frac{\beta}{2} &= \sqrt{\frac{(s - a)(s - c)}{ac}} = \sqrt{\frac{(68,52 - 52,46)(68,52 - 45,21)}{52,46 \cdot 45,21}} \doteq 0,39729 \Rightarrow \frac{\beta}{2} \doteq 23^\circ 24' 33'' \Rightarrow \beta \doteq 46^\circ 49' 06'' \\ \gamma &= 180^\circ - (\alpha + \beta) = 56^\circ 51' 42'' \end{aligned}$$

Ověření:

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s - a)(s - b)}{ab}} = \sqrt{\frac{(68,52 - 52,46)(68,52 - 39,37)}{52,46 \cdot 39,37}} \doteq 0,47700 \Rightarrow \frac{\gamma}{2} = 28^\circ 25' 51'' \Rightarrow \gamma = 56^\circ 51' 42''$$

Platí: $b < c < a \Rightarrow \beta < \gamma < \alpha$

Vnitřní úhly $\triangle ABC$ jsou: $\alpha = 76^\circ 19' 12''$, $\beta = 46^\circ 49' 06''$, $\gamma = 56^\circ 51' 42''$.

Např. Odvoďte vztah pro určení výšky h (viz obrázek), znáte-li:

a) α, β, γ, s

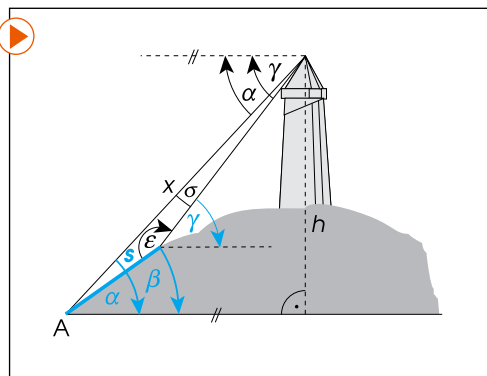
Řešení: (1) $h = x \cdot \sin \alpha$

$$(2) x = s \cdot \frac{\sin \varepsilon}{\sin \sigma}$$

$$(3) \varepsilon = \beta + (180^\circ - \gamma)$$

$$(4) \sigma = \gamma - \alpha$$

$$\text{Odtud: } h = \frac{s \cdot \sin \alpha \cdot \sin (\gamma - \beta)}{\sin (\gamma - \alpha)}.$$

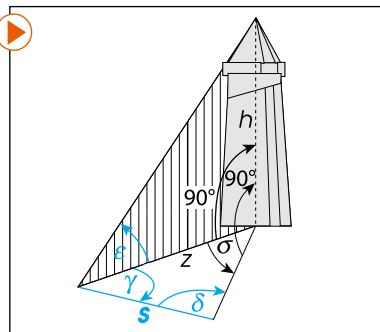


b) $\gamma, \varepsilon, \delta, s$

Řešení: (1) $h = z \cdot \operatorname{tg} \varepsilon$

$$\begin{aligned} (2) z &= s \cdot \sin \delta / \sin \sigma = \\ &= s \cdot \sin \delta / \sin (180^\circ - (\gamma + \delta)) = \\ &= s \cdot \sin \delta / \sin (\gamma + \delta) \end{aligned}$$

$$\text{Odtud: } h = \frac{s \cdot \sin \delta \cdot \operatorname{tg} \varepsilon}{\sin (\gamma + \delta)}.$$



Cvičení 5

5.1 Vyjádřete v míře stupňové:

$$\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{10}, \frac{11\pi}{15}, \frac{13\pi}{6}$$

5.2 Velikost úhlu vyjádřenou v radiánech převeďte na stupňovou míru: π ; 1; 5; 100; $\sqrt{2}$

5.3 Vyjádřete v radiánech: 36° ; 105° ; 156° ; 315°

5.4 Určete hodnoty všech goniometrických funkcí v pravouhlém trojúhelníku ABC, který má poloměr kružnice opsané $r = 2,5$ m, délku odvěsny $b = 4$ m a pravý úhel při vrcholu C.

5.5 Rovnoběžník má obsah 96 cm^2 , úhlopříčky mají délky 24 cm a 13 cm. Jaký úhel úhlopříčky svírají?

5.6 Určete definiční obor funkce, pak sestrojte její graf:

$$f: y = -\frac{\sin x}{|\sin x|} \wedge x \in \langle -2\pi; 2\pi \rangle$$

5.7 Ověřte, zda pro všechna reálná x , pro která jsou vztahy definovány, platí:

$$a) \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} = \frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x}$$

$$b) \frac{\sin^2 x + \cos^2 x + \cos x + \cos 2x}{\sin x + \sin 2x} = \operatorname{cotg} x$$

$$c) \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} = \frac{1 - \operatorname{cotg} x}{1 + \operatorname{cotg} x}$$

$$d) \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} = \operatorname{tg} x$$

$$e) \frac{2 \cdot \operatorname{cotg} \frac{x}{2} \cdot \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}} = \operatorname{tg} x$$

$$f) \frac{\sin x \sin y - \cos(x - y)}{\cos(x + y) - \cos x \cos y} = \operatorname{cotg} x \cdot \operatorname{cotg} y$$

$$g) \frac{\cos x + \cos 5x - \cos 3x}{\sin x + \sin 5x - \sin 3x} = \operatorname{cotg} 3x$$

5.8 Určete všechna $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$, pro která platí:

$$a) |\sin x| = \frac{1}{2}$$

$$b) \operatorname{tg} x = -1$$

$$c) |\operatorname{cotg} x| = 1$$

5.9 Řešte pro $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$:

$$a) 2 \sin^2 x + 3 \cos x = 0$$

$$b) \sin^2 x + 3 \cos^2 x + \cos x = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x$$

5.10 Řešte v $\mathbf{R}$:

$$a) \sin x = \sin \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}$$

$$b) |\cos x| = \frac{1}{2}$$

5.11 Řešte v $\mathbf{R}$:

$$a) \operatorname{tg} x - \sin 2x = 0$$

$$b) \sin x \cdot \cos x = \sin^2 2x$$

$$c) \sin x - \sin 2x - \sin 3x = 0$$

$$d) 2 \cos(2x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$$

5.12 Určete vnitřní úhly trojúhelníku ABC, je-li $a = 13 \text{ cm}$, $b = 14 \text{ cm}$, $c = 15 \text{ cm}$. Jaký je obsah tohoto trojúhelníku?

Test 5

5.1 Platí:

- a) $\sin 45^\circ < \cos 45^\circ$
- b) $\operatorname{tg} 45^\circ \geq \operatorname{cotg} 60^\circ$
- c) $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4}$
- d) $\operatorname{tg} \frac{7\pi}{2} = \operatorname{cotg} \frac{7\pi}{2}$

5.2 Neplatí:

- a) $\operatorname{tg} \frac{11\pi}{6} > 0$
- b) $\cos \frac{\pi}{3} > \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$
- c) $\sin \frac{5\pi}{4} > \operatorname{tg} \frac{5\pi}{4}$
- d) $\operatorname{cotg} \frac{3\pi}{4} > \cos \frac{5\pi}{3}$

5.3 Hodnota tří z funkcí $f_1: y = \sin x$, $f_2: y = \cos x$, $f_3: y = \operatorname{tg} x$, $f_4: y = \operatorname{cotg} x$ je současně záporná pro úhel x :

- a) z prvního kvadrantu
- b) z druhého kvadrantu
- c) z třetího kvadrantu
- d) ze čtvrtého kvadrantu

5.4 Pro $x \in \langle 0; \pi \rangle$ mají grafy funkcí

$$f_1: y = \sin x, f_2: y = 4 \cdot \sin 2x:$$

- a) právě jeden společný bod
- b) právě tři společné body
- c) alespoň čtyři společné body
- d) nekonečně mnoho společných bodů

5.5 Pro přípustné hodnoty x, y platí:

- a) $\sin x + \sin y = \sin(x + y)$
- b) $\sin x - \sin y = \sin(x - y)$
- c) $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$
- d) $\cos x + \cos y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$

5.6 Obsah trojúhelníka ABC, pro který platí:
 $a = 5 \text{ cm}$, $b = 4 \text{ cm}$, $\gamma = 30^\circ$, je:

- a) 5 cm^2
- b) 4 cm^2
- c) 8 cm^2
- d) 10 cm^2

5.7 Řešením rovnice

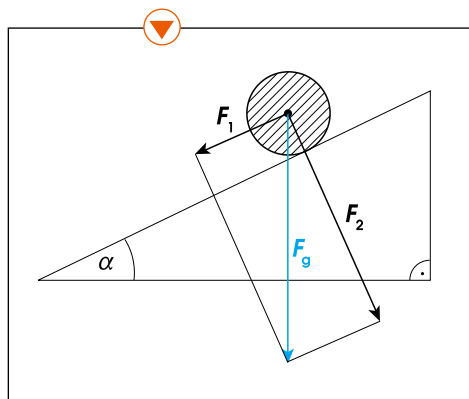
$$\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} = 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} \wedge x \in \langle 0; 2\pi \rangle \text{ je:}$$

- a) $K = \{k\pi \wedge k \in \mathbf{Z}\}$
- b) $K = \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$
- c) $K = \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right\}$
- d) $K = \left\{ \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\}$

5.8 Určete všechna $x \in \mathbf{R}$, pro která platí
 $\cos^2 x - \sin^2 x = 0$.

5.9 Určete všechna $x \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle$, pro která platí
 $\operatorname{cotg} x \geq 1 \wedge \sin x \leq 1/2$.

5.10 Určete velikosti sil F_1 a F_2 na nakloněné rovině pomocí úhlu α a výslednice F_g .



6. Elementární geometrie

6.1. ROZDĚLENÍ GEOMETRIE, ZÁKLADNÍ GEOMETRICKÉ POJMY

- Geometrie vznikla a rozvíjela se na základě potřeb řešit úlohy, které souvisely například se stavebnictvím, s mořeplavectvím, s astronomií, s určováním obvodů, ploch, objemů atd. První zdařilý pokus o axiomatickou výstavbu geometrie učinil ve 3. století př. n. l. Euklides, který ve třinácti knihách zvaných *Základy* – utřídil základní geometrické poznatky do přehledného systému, v němž ze základních pojmů a tvrzení (axiómů) vyvodil další pojmy a logicky dokázal platnost nových výroků. Úplnou soustavu axiómů euklidovské geometrie, kterou používáme prakticky dodnes, publikoval roku 1899 matematik Hilbert v knize *Základy geometrie*. Tato soustava vychází ze základních pojmů **bod**, **přímka**, **rovina** a umožňuje dokázat věty užívané v elementární geometrii a zavést **množiny bodů na přímce** (např. polopřímku, úsečku), **v rovině** (např. úhel, trojúhelník, n–úhelník, kruh atd.) a **v prostoru** (např. hranol, válec, koule a další geometrická tělesa).

Např. Prvních pět Euklidových postulátů lze vyslovit takto:

- Dvěma různými body lze vést vždy jedinou přímku.
- Každou úsečku lze neomezeně prodloužit.
- Každému bodu lze opsat kružnici s libovolným poloměrem.
- Všechny pravé úhly jsou shodné.
- Každé dvě přímky prořáté v rovině třetí přímku, která s nimi na téže straně svírá vnitřní (přilehlé) úhly, jejichž součet je menší než dva úhly pravé, se po prodloužení protínají na té straně třetí přímky, na níž leží úhly (přilehlé) o součtu menším než dva úhly pravé.

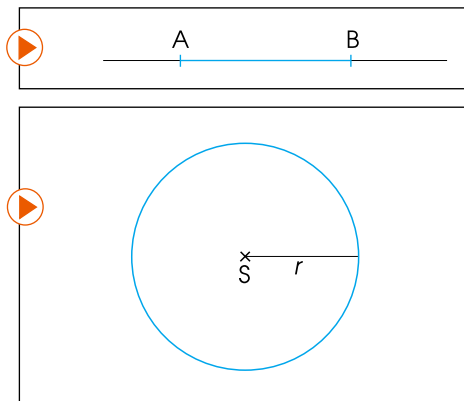
Např. **Úsečka** je průnik dvou polopřímek:

$$\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{BA}$$

Kružnice je množina všech bodů v rovině, které mají od pevného bodu S (střed) konstantní nenulovou vzdálenost r (poloměr).

- V 19. století pronikl do geometrie výrazněji aparát vybudovaný v jiných částech matematiky a objevily se tzv. neeuklidovské geometrie (Lobačevskij, Bolyai), které vycházely z jiných axiómů.

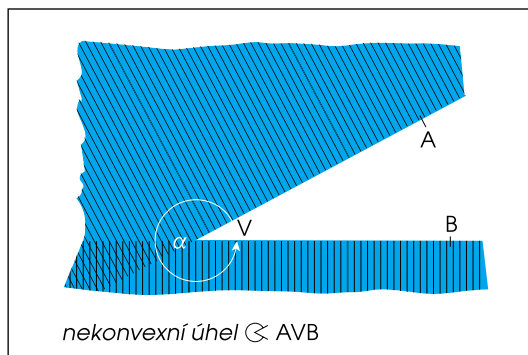
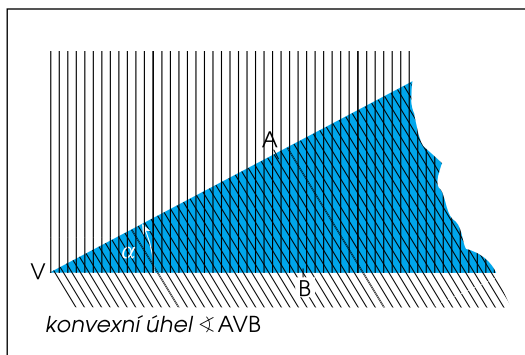
- Geometrie
 - v rovině → **planimetrie**
 - v prostoru → **stereometrie**



6.2. ÚHLY

■ Úhel  *konvexní* $\sphericalangle AVB$
je průnik dvou polorovin:
 $\sphericalangle AVB \Rightarrow AVB \cap \rightarrow VBA$

■ *nekonvexní* $\sphericalangle AVB$
je sjednocení polorovin opačných k polorovinám
 $\rightarrow AVB$ a $\rightarrow BVA$



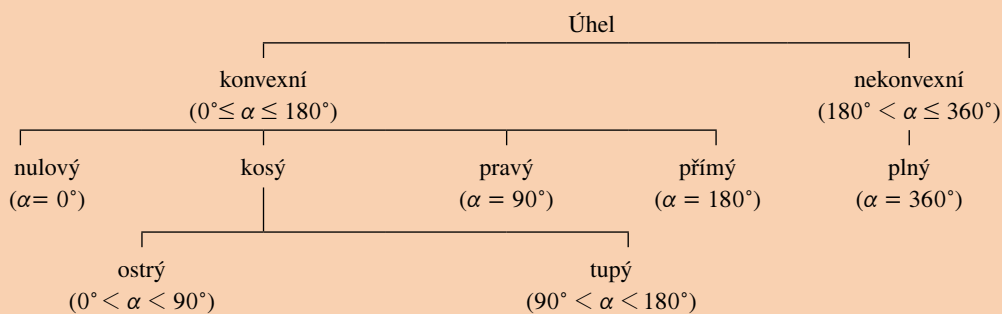
■ **Velikost úhlu** ($|\sphericalangle AVB| = \alpha$) se v planimetrii udává zpravidla ve *stupních* ($^\circ$), *minutách* ($'$) a *vteřinách* ($''$):

Např. $2,5^\circ = 2^\circ 30'$
 $10^\circ 15' = 10 \cdot 60' + 15' = 615'$
 $3^\circ 10' 15'' = 3 \cdot 3600'' + 10 \cdot 60'' + 15'' = 11415''$



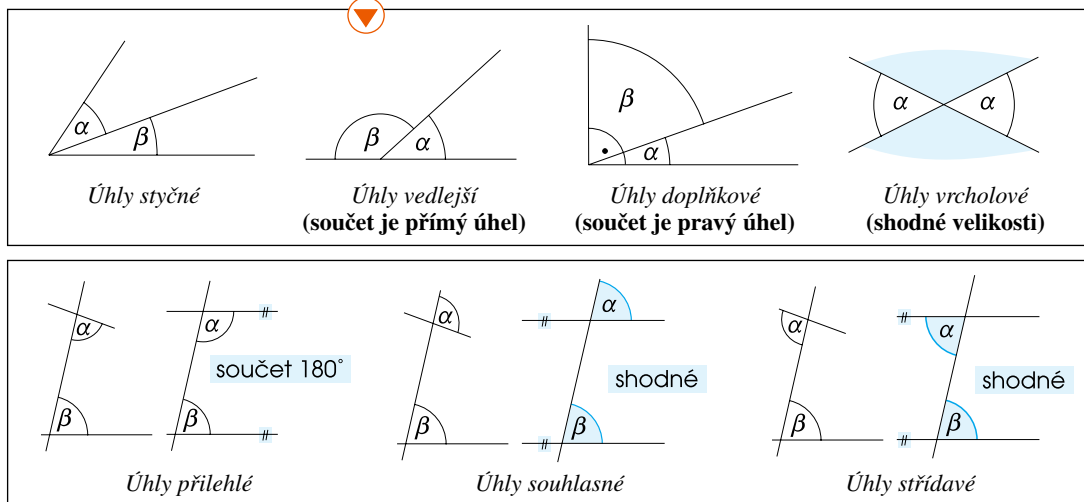
zapamatuj si

Rozdělení úhlů podle velikosti



Např. $\sphericalangle AVB = 60^\circ$ $\sphericalangle AVB = 90^\circ$ $\sphericalangle AVB = 120^\circ$ $\sphericalangle AVB = 210^\circ$	úhel ostrý úhel pravý (označujeme $\perp$ a jeho velikost R) úhel tupý úhel nekonvexní	}	konvexní
--	---	---	----------

■ Rozdělení úhlů podle polohy



■ Pro trojúhelníky platí:

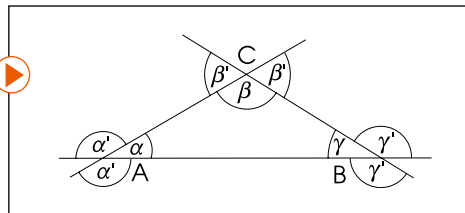
- Součet velikostí vnitřních úhlů v trojúhelníku je 180° :

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

- Velikost vnějšího úhlu trojúhelníku je rovna součtu velikostí vnitřních úhlů u zbývajících vrcholů:

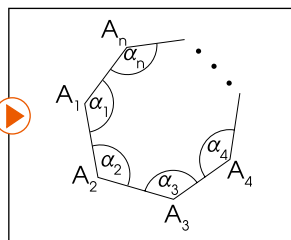
$$\alpha' = \beta + \gamma, \beta' = \alpha + \gamma, \gamma' = \alpha + \beta.$$

- Proti shodným stranám leží shodné úhly a naopak.
- Proti větší straně leží větší úhel a naopak.



■ Pro konvexní n–úhelník platí:

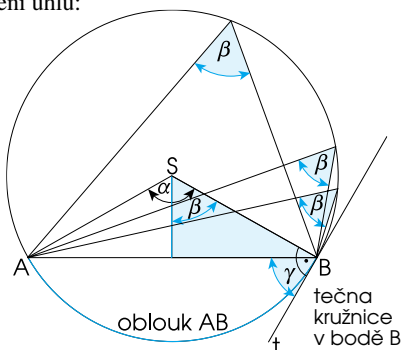
- Součet velikostí vnitřních úhlů kteréhokoli konvexního n–úhelníku se rovná $(n - 2) \cdot 180^\circ$.



zapamatuj si

■ Pro kružnici platí:

Značení úhlů:



β ... **obvodový úhel** příslušný k oblouku AB (jeho vrcholem je libovolný bod kružnice, který nenáleží k danému oblouku AB)

α ... **středový úhel** příslušný k oblouku AB (jeho vrcholem je střed kružnice a ramena tvoří polopřímky $\rightarrow SA$ a $\rightarrow SB$; uvnitř tohoto úhlu leží celý oblouk AB)

γ ... **úsekový úhel** příslušný k oblouku AB ($\gamma = \beta$)

■ Vlastnosti úhlů v kružnicích:

V každé kružnici je velikost obvodového úhlu (úsekového úhlu) rovna polovině velikosti středového úhlu příslušného k témuž oblouku.

Každé dva obvodové úhly příslušné k témuž oblouku kružnice mají shodnou velikost.

Obvodové úhly příslušející k půlkružnici jsou pravé (**Thaletova věta**).

Např. Určete velikost nejmenšího úhlu v trojúhelníku, jehož vrcholy na hodinovém ciferníku spojují číslice 5, 10 a 12.

Řešení: Nejmenší úhel bude u číslice 5. Je to *obvodový úhel* příslušný k oblouku spojujícímu 10 a 12, k němuž přísluší *středový úhel* o velikosti 60° .

Hledaný úhel má velikost 30°
(polovina úhlu středového).

Např. Dopočítejte velikosti vyznačených úhlů:

Řešení: $\delta = 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$

$$\alpha = \delta = 20^\circ$$

... úhly souhlasné

$$\gamma = 90^\circ$$

... úhly vrcholové

$$\beta = 70^\circ$$

... úhly střídavé

$$\beta' = 180^\circ - \beta = 110^\circ$$

... úhly vedlejší

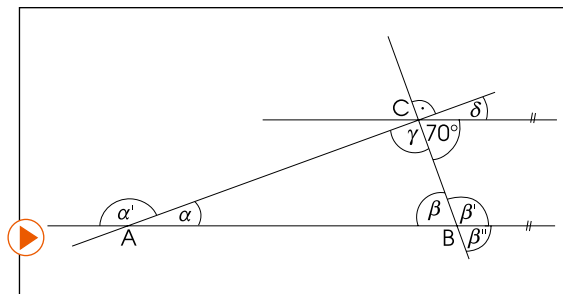
$$\alpha' = 180^\circ - \alpha = 160^\circ$$

... úhly vedlejší

$$\beta'' = \beta = 70^\circ$$

... úhly vrcholové

Velikosti úhlů jsou: $\alpha = 20^\circ, \alpha' = 160^\circ, \beta = 70^\circ, \beta' = 110^\circ, \beta'' = 70^\circ, \gamma = 90^\circ, \delta = 20^\circ$.



6.3. TROJÚHELNÍK

■ **Trojúhelník** je průnik tří polorovin: $\triangle ABC = \rightarrow ABC \cap \rightarrow CBA \cap \rightarrow ACB$.

■ Trojúhelník je jednoznačně určen, jsou-li zadány jeho určovací prvky:

- délka strany a velikosti dvou k ní přilehlých úhlů, jejichž součet velikostí je menší než 180° (věta **usu**)
- délky dvou stran a velikost úhlu jimi sevřeného (věta **sus**)
- dvě různé délky stran a velikost úhlu protilehlého k delší z nich (věta **Ssu**)
- délky tří stran, pro něž platí trojúhelníková nerovnost $|a - b| < c < a + b$ (věta **sss**)

■ Značení:

A, B, C ... vrcholy

a, b, c ... strany

α, β, γ ... vnitřní úhly

α', β', γ' ... vnější úhly

v_a, v_b, v_c ... výšky (kolmice spuštěná z vrcholu k příslušné straně, V – průsečík výšek)

t_a, t_b, t_c ... těžnice (přímka spojující vrchol se středem protější strany, průsečík těžnic je těžiště T – dělí těžnici v poměru 2:1)

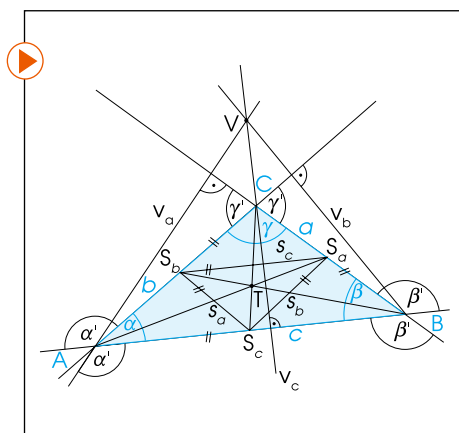
o_a, o_b, o_c ... osy stran ($O = o_a \cap o_b \cap o_c$ je střed kružnice opsané)

$o_\alpha, o_\beta, o_\gamma$... osy úhlů ($S = o_\alpha \cap o_\beta \cap o_\gamma$ je střed kružnice vepsané)

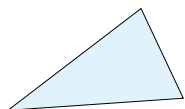
s_a, s_b, s_c ... střední příčky (spojnice středů stran)

r ... poloměr kružnice opsané

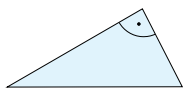
ρ ... poloměr kružnice vepsané



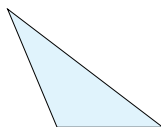
Trojúhelník



ostroúhlý



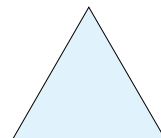
pravoúhlý



tupoúhlý

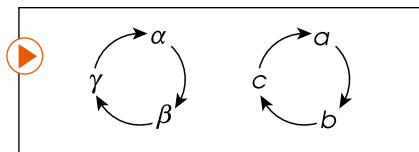


rovnoramenný



rovnostranný

■ cyklická záměna CZ



zapamatuj si

■ V trojúhelníku platí:

Úhly $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

$\alpha' = \beta + \gamma$ (CZ)

Obvod $O = a + b + c$

poloviční obvod $s = \frac{O}{2} = \frac{a+b+c}{2}$

Obsah $S = \frac{z \cdot v}{2}$

$S = \frac{a \cdot v_a}{2}$ (CZ)

$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma$ (CZ)

$S = \rho^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$; $S = \rho^2 \cotg \frac{\alpha}{2} \cdot \cotg \frac{\beta}{2} \cdot \cotg \frac{\gamma}{2}$; $S = 2r^2 \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma$

$S = \frac{abc}{4r}$ (r ... poloměr kružnice opsané)

$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ Heronův vzorec

$S = \rho \cdot s$ (ρ ... poloměr kružnice vepsané)

Věta sinová

$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2r$

(Trojúhelník určen podle vět usu, Ssu.)

Věta kosinová

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$ (CZ)

(Trojúhelník určen podle vět sss, sus.)

Věta tangentová

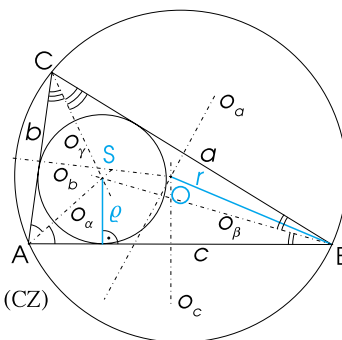
$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2}}$ (CZ); $\operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2} = \cotg \frac{\gamma}{2}$ (CZ)

(Trojúhelník určen podle věty sus.)

Úhly

$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\rho}{s-a}$ (CZ); $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$ (CZ); $\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$ (CZ)

$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos \frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}}$ (CZ); $\frac{a-b}{c} = \frac{\sin \frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}$ (CZ)

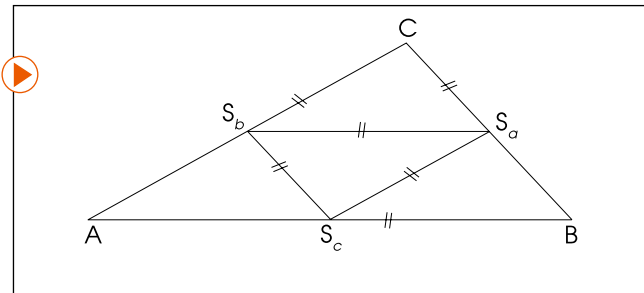


Např. Sestrojte $\triangle ABC$, je-li dáno $s_a = 2\text{ cm}$, $s_b = 3\text{ cm}$, $s_c = 4\text{ cm}$. Pak vypočítejte jeho obvod, obsah a velikosti vnitřních úhlů. Určete velikosti poloměrů r , ρ .

Řešení: Konstrukce vychází z vlastností středních příček, které jsou rovnoběžné s příslušnou stranou a mají poloviční délku než tato strana:

KONSTRUKCE:

1. $\triangle S_a S_b S_c$ (sss)
2. $c; S_c \in c \wedge c \parallel S_a S_b$
3. $a; S_a \in a \wedge a \parallel S_b S_c$
4. $b; S_b \in b \wedge b \parallel S_a S_c$
5. $\triangle ABC$



VÝPOČET:

$$a = 2 \cdot s_a = 4\text{ cm}, \quad b = 2 \cdot s_b = 6\text{ cm}, \quad c = 2 \cdot s_c = 8\text{ cm}$$

$$O = a + b + c = (4 + 6 + 8)\text{ cm} = 18\text{ cm}$$

$$s = \frac{O}{2} = 9\text{ cm}$$

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{9 \cdot (9-4) \cdot (9-6) \cdot (9-8)}\text{ cm}^2 = \sqrt{135}\text{ cm}^2 \doteq 11,62\text{ cm}^2$$

$$r = \frac{abc}{4S} = \frac{4 \cdot 6 \cdot 8}{4 \cdot \sqrt{135}}\text{ cm} = \frac{48}{\sqrt{135}}\text{ cm} = \frac{48 \cdot \sqrt{135}}{135}\text{ cm} \doteq 4,13\text{ cm}$$

$$\rho = \frac{S}{s} = \frac{\sqrt{135}}{9}\text{ cm} \doteq 1,29\text{ cm}$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} = \sqrt{\frac{(9-6)(9-8)}{6 \cdot 8}} \Rightarrow \alpha \doteq 28^\circ 57'$$

$$\sin \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}} = \sqrt{\frac{(9-4)(9-8)}{4 \cdot 8}} \Rightarrow \beta \doteq 46^\circ 35'$$

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 104^\circ 28'$$

Obvod je 18 cm, obsah $\sqrt{135}\text{ cm}^2$, $\alpha = 28^\circ 57'$, $\beta = 46^\circ 35'$, $\gamma = 104^\circ 28'$, $r \doteq 4,13\text{ cm}$, $\rho \doteq 1,29\text{ cm}$.

zapamatuj si

■ Pravoúhlý trojúhelník

Úhly: $\gamma = 90^\circ$, $\alpha + \beta = 90^\circ$, $\sin \alpha = \frac{a}{c}$, $\cos \alpha = \frac{b}{c}$, $\tan \alpha = \frac{a}{b}$, $\cot \alpha = \frac{b}{a}$

Obsah: $S = \frac{ab}{2}$

Pythagorova věta: $c^2 = a^2 + b^2$

Euklidova věta

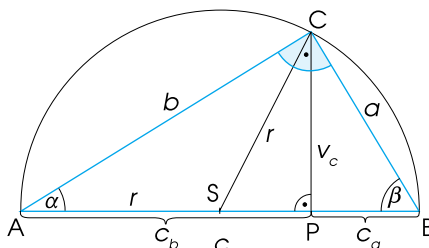
■ pro výšku: $v_c^2 = c_a \cdot c_b$

(Obsah čtverce sestaveného nad výškou pravoúhlého trojúhelníka se rovná obsahu obdélníka sestaveného z obou úseků na přeponě.)

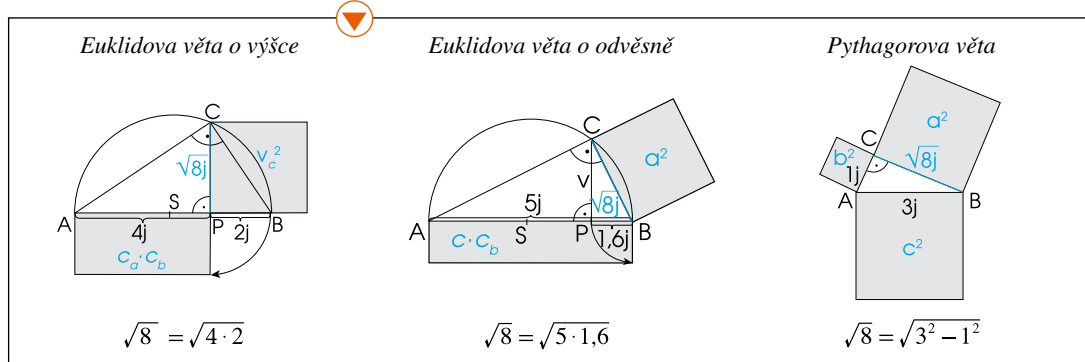
■ pro odvěsnu: $a^2 = c \cdot c_a$ $b^2 = c \cdot c_b$

(Obsah čtverce sestaveného nad odvěsnou pravoúhlého trojúhelníka se rovná obsahu obdélníka sestaveného z přepony a úseku odvěsny přilehlého.)

Poloměr kružnice opsané (Thaletova kružnice): $r = \frac{c}{2}$



Např. Sestrojte úsečku délky $\sqrt{8}j$ (střední geometricky úměrná; geometrický průměr).



zapamatuj si

■ Rovnostranný trojúhelník

Strany: $a = b = c$

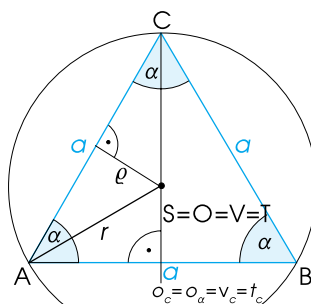
Úhly: $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$

Výška: $v = \frac{a}{2} \sqrt{3}$

Obsah: $S = \frac{z \cdot v}{3} = \frac{a^2}{4} \sqrt{3}$

Poloměr kružnice opsané: $r = \frac{a}{3} \sqrt{3} \quad \left(r = \frac{2}{3} t = \frac{2}{3} v \right)$

Poloměr kružnice vepsané: $\varrho = \frac{a}{6} \sqrt{3} \quad \left(\varrho = \frac{1}{3} t = \frac{1}{3} v \right)$



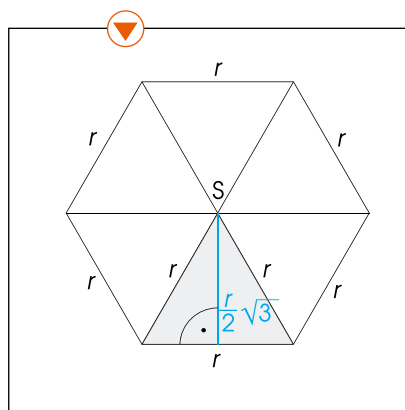
Např. Do kružnice o poloměru r je vepsán pravidelný šestiúhelník. Vyjádřete obsah tohoto šestiúhelníku pomocí poloměru r .

Řešení: Pravidelný šestiúhelník vepsaný do kružnice o poloměru r má stranu délky r . Lze ho tedy rozdělit na šest rovnostranných trojúhelníků se stranou délky r .
Obsah jednoho z těchto trojúhelníků je

$$S_{\Delta} = \frac{r^2}{4} \cdot \sqrt{3}$$

Obsah šestiúhelníku je

$$S = 6 \cdot S_{\Delta} = \frac{3r^2}{2} \sqrt{3}$$

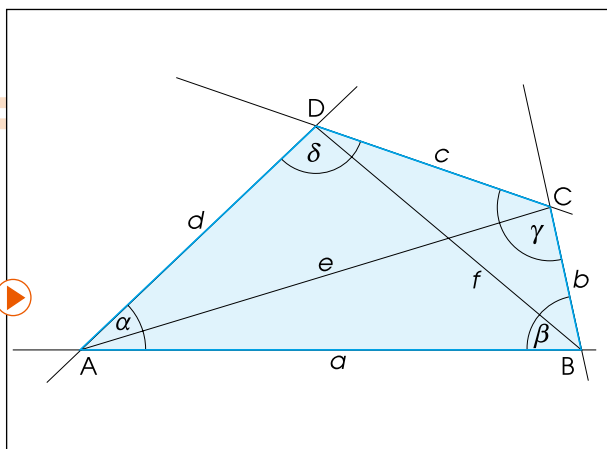


6.4. ČTYŘÚHELNÍK

- Čtýřúhelník lze vytvořit sjednocením dvou trojúhelníků $ABCD = \triangle ABC \cup \triangle ACD$

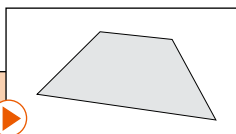
Značení:

A, B, C, D	... vrcholy
a, b, c, d	... strany
$\alpha, \beta, \gamma, \delta$	... vnitřní úhly
e, f	... úhlopříčky



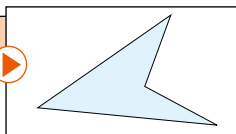
Čtýřúhelník

konvexní



všechny vnitřní úhly jsou konvexní

nekonvexní



má nekonvexní vnitřní úhel

- Rovnoběžníky** (zahrnují pod sebou obdélník, čtverec, kosodélník a kosočtverec) jsou zvláštní případy konvexních čtýřúhelníků, pro které platí:

- protější strany mají stejně dlouhé a rovnoběžné
- jsou středově souměrné
- úhlopříčky rovnoběžníku se navzájem půlí
- součet všech vnitřních úhlů je 360°
- rovnoběžníky – pravoúhelníky – všechny vnitřní úhly jsou pravé (obdélník, čtverec)
- kosouhelníky – dva vnitřní úhly kosé (kosodélník, kosočtverec)



zapamatuj si

Rovnoběžníky

Obdélník

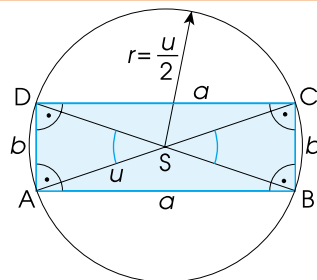
Obvod: $O = 2(a + b)$

Obsah: $S = ab$

Úhlopříčka: $u = \sqrt{a^2 + b^2}$

Poloměr kružnice opsané: $r = \frac{u}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$

Kružnice vepsaná neexistuje.



Čtverec

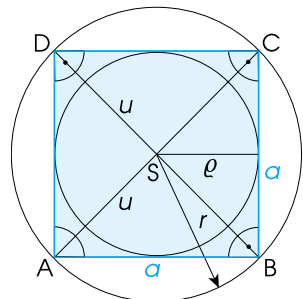
Obvod: $O = 4 \cdot a$

Obsah: $S = a^2 = \frac{1}{2}u^2$

Úhlopříčka: $u = a\sqrt{2}$

Poloměr kružnice opsané: $r = \frac{u}{2} = \frac{a}{2}\sqrt{2}$

Poloměr kružnice vepsané: $\varrho = \frac{a}{2}$



zapamatuj si



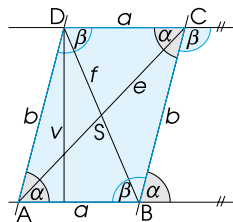
Kosodélník

Obvod: $O = 2(a + b)$

Obsah: $S = a \cdot v$; $S = a \cdot b \cdot \sin \alpha$

Úhly: $\alpha + \beta = 180^\circ$

Nelze mu kružnici ani vepsat, ani opsat.



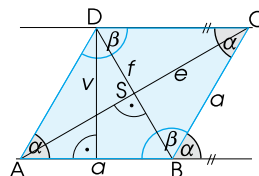
Kosočtverec

Obvod: $O = 4 \cdot a$

Obsah: $S = a \cdot v$; $S = \frac{e \cdot f}{2}$; $S = a^2 \cdot \sin \alpha$

Úhly: $\alpha + \beta = 180^\circ$

Lze mu vepsat kružnici.

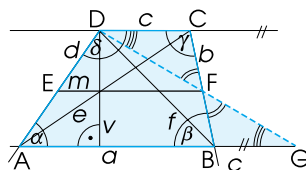


Lichoběžník

Obvod: $O = a + b + c + d$

Obsah: $S = \frac{a+c}{2} \cdot v = m \cdot v$

($m = \frac{a+c}{2}$... střední příčka lichoběžníku)



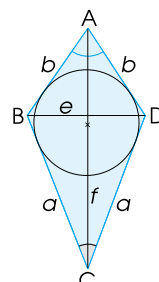
Deltoid

je souměrný podle osy AC a má

úhlopříčky navzájem kolmé.

Obvod: $O = 2(a + b)$

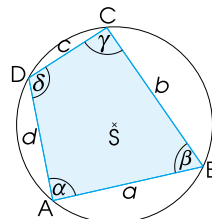
Obsah: $S = \frac{e \cdot f}{2}$



Tětivový čtyřúhelník

je čtyřúhelník, kterému lze opsat kružnici.

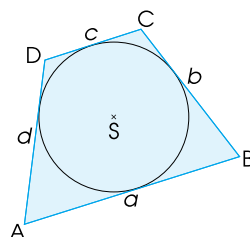
Platí: $\alpha + \gamma = \beta + \delta$



Tečnový čtyřúhelník

je čtyřúhelník, kterému lze vepsat kružnici.

Platí: $a + c = b + d$

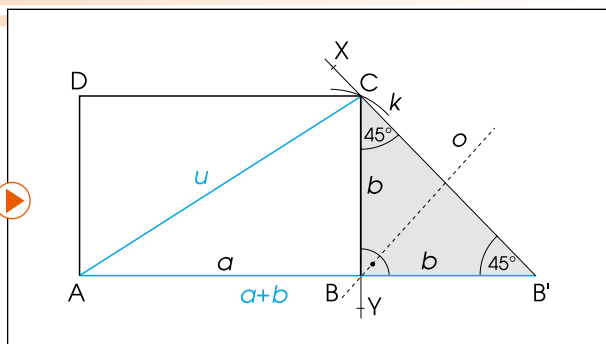


Např. Zapište postup konstrukce obdélníka ABCD, je-li dáno $u, a + b$.

Řešení: Princip řešení úlohy vychází z rovnoramenného $\triangle BB'C$.

1. $AB'; |AB'| = a + b$
2. $\sphericalangle AB'X; |\sphericalangle AB'X| = 45^\circ$
3. $k; k = (A; o = u)$
4. $C; C = k \cap B'X$
5. $\sphericalangle B'CY; |\sphericalangle B'CY| = 45^\circ$
6. $B; B = AB' \cap CY$
7. ABCD; $\triangle ABC$ doplníme na rovnoběžník ABCD

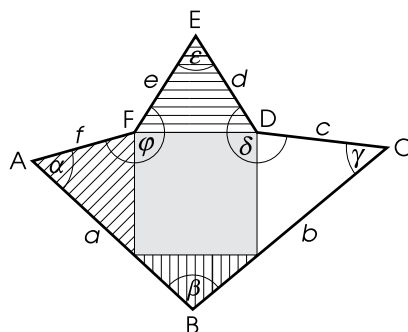
(Je možný i jiný způsob řešení, např. s využitím osy o atd.)



6.5. n-ÚHELNÍK

■ Obecný n-úhelník

Při řešení úloh o n-úhelníku postupujeme zpravidla tak, že úlohu převedeme na úlohu o útvech, ze kterých lze n-úhelník sjednocením vytvořit (trojúhelníky, čtverce, obdélníky atd.)



zapamatuj si

■ Pravidelný n-úhelník

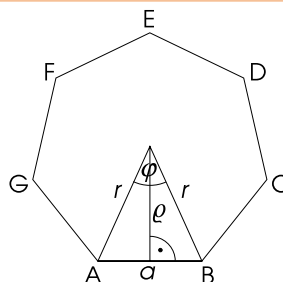
Obvod: $O = n \cdot a$

Obsah: $S = n \cdot \frac{a}{2} \cdot \rho = \frac{O \cdot \rho}{2}$

Počet úhlopříček: $u = \frac{n(n-3)}{2}$

Součet vnitřních úhlů: $(n-2) \cdot 180^\circ$

Lze mu opsat i vepsat kružnici.



6.6. KRUŽNICE A KRUH

■ **Kružnice** je množina všech bodů v rovině, které mají od bodu S (střed kružnice) konstantní nenulovou vzdálenost r (poloměr kružnice).

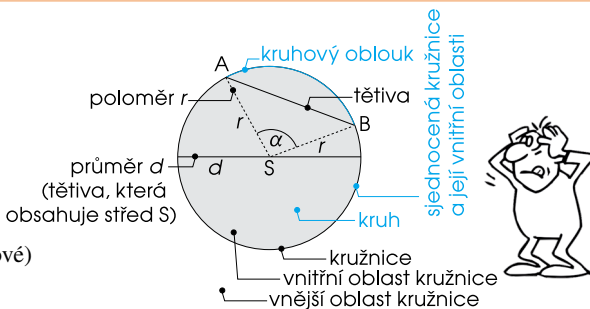
■ **Kruh** je množina všech bodů v rovině, jejichž vzdálenost od bodu S (střed kruhu) je nejvýše rovna kladnému číslu r (poloměr kruhu).

zapamatuj si

Délka kružnice: $O = 2\pi r = \pi d$

Obsah kruhu: $S = \pi r^2 = \pi \frac{d^2}{4}$

Délka kruhového oblouku: $a = \frac{2\pi r}{360^\circ} \cdot \alpha$
(α v míře stupňové)



Např. Čtverci o straně délky 3 cm opište kružnici k .

Pak vypočtete:

- délku kružnice k
- obsah kruhu, který je určen kružnicí k
- délku kruhového oblouku, který na kružnici vymezují sousední vrcholy čtverce

Řešení: $r = \frac{u}{2} = \frac{3}{2} \sqrt{2} \text{ cm}$

a) $O = 2\pi r = 3\sqrt{2} \pi \text{ cm}$

b) $S = \pi r^2 = \frac{9}{2} \pi \text{ cm}^2$

c) $a = \frac{2\pi r}{360^\circ} \cdot 90^\circ = \frac{1}{2} \pi r = \frac{3}{4} \sqrt{2} \pi \text{ cm}$

- Kruhová výseč** je průnik kruhu a úhlu, jehož vrchol je ve středu kruhu.

Obsah kruhové výseče: $S = \frac{\pi r^2 \alpha}{360^\circ} = \frac{l r}{2}$

(l je délka příslušného oblouku kružnice, α je velikost příslušného středového úhlu v míře stupňové)

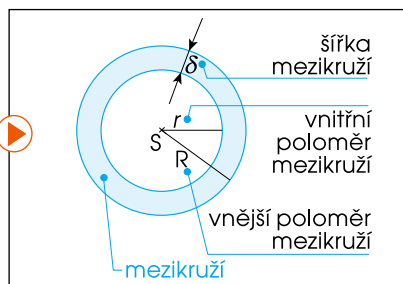
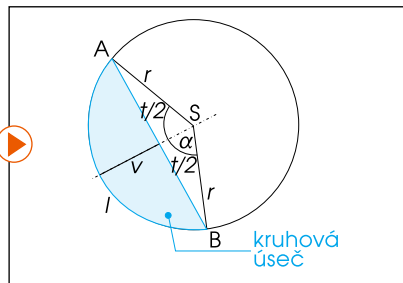
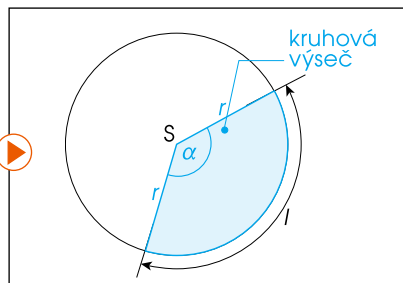
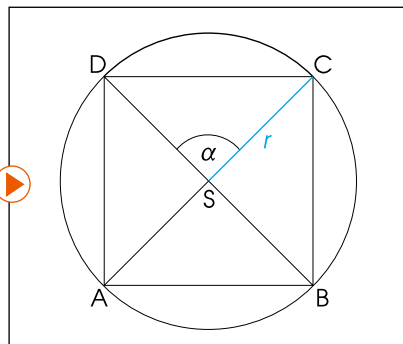
- Kruhová úseč** je průnik kruhu a poloroviny, jejíž hraniční přímka má od středu kruhu S vzdálenost menší než jeho poloměr. Obsah kruhové úseče se rovná rozdílu obsahu kruhové výseče a obsahu trojúhelníka ASB :

$$S = \frac{1}{2} [l \cdot r - t \cdot (r - v)] = \frac{r^2}{2} \left(\frac{\pi \alpha}{180^\circ} - \sin \alpha \right)$$

- Mezikruží** je množina všech bodů v rovině, které mají od pevného bodu S zvaného střed mezikruží vzdálenost alespoň r a nejvýše R .

Obsah mezikruží:

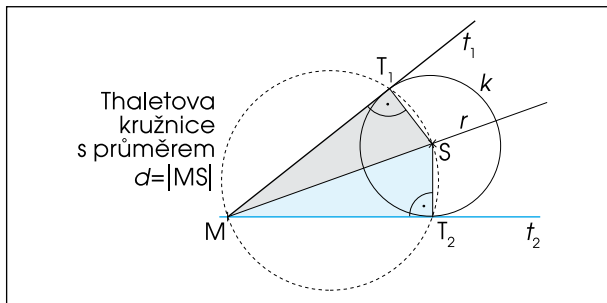
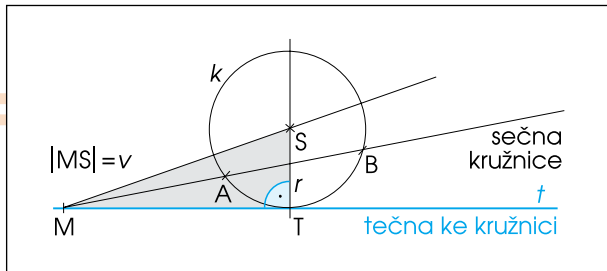
$$S = \pi (R^2 - r^2) = \frac{1}{4} \pi (D^2 - d^2) = \frac{1}{4} \pi (D - d) (D + d)$$



MOCNOST BODU KE KRUŽNICI

$$|MT|^2 = |MA| \cdot |MB| = v^2 - r^2$$

Např. Užití mocnosti bodu ke kružnici při konstrukci tečny vedené z bodu M ke kružnici k .



6.7. SHODNÁ GEOMETRICKÁ ZOBRAZENÍ V ROVINĚ

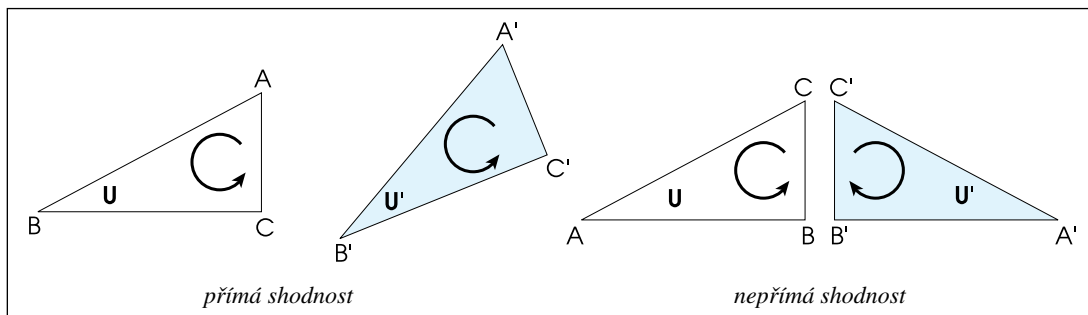
Přiřadíme-li každému bodu X roviny právě jeden bod X' téže roviny, dostaneme množinu uspořádaných dvojic $[X; X']$, která se nazývá **geometrické zobrazení v rovině**. Bod X je **vzor**, X' jeho **obraz**. Zapisujeme $X \rightarrow X'$.

- Pokud obraz bodu splýne s jeho vzorem, nazývá se bod $X = X'$ **samodružný bod geometrického zobrazení**.
- Obrazem útvaru U v daném zobrazení je U' . Zapisujeme $U \rightarrow U'$. Jestliže obrazem útvaru U je útvar U' , který se svým vzorem U splývá, říkáme, že útvar $U' = U$ je **samodružný útvar** daného zobrazení (body X' útvaru U nemusí splývat se svým vzorem X).
- Pokud lze útvary U_1, U_2 přemístit tak, že se navzájem kryjí, nazýváme je **shodnými útvary** a zapisujeme $U_1 \cong U_2$.

6.8. SHODNÁ ZOBRAZENÍ

Geometrické zobrazení v rovině nazýváme **shodným zobrazením (shodností)**, je-li každému bodu X roviny přiřazen právě jeden obraz X' tak, že pro každé dvě uspořádané dvojice $[X; X']$ a $[Y; Y']$ vzorů a obrazů platí: $|X'Y'| = |XY|$.

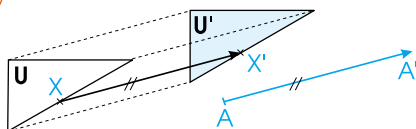
- **Přímá shodnost (identita I , posunutí (translace) T , otočení (rotace) R , středová souměrnost S)** zobrazí každý orientovaný úhel v souhlasně orientovaný úhel.
- **Nepřímá shodnost (osová souměrnost O)** zobrazí každý orientovaný úhel v úhel opačně orientovaný.



- Jsou-li dva **útvary** U a U' **shodné**, pak lze najít takové shodné zobrazení, že se útvar U převede na útvar U' .

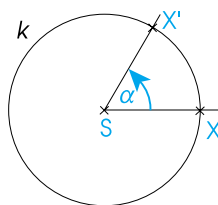
Identita I je zvláštním případem shodnosti, při němž obrazem každého bodu X roviny je tentýž bod $X' = X$.

Posunutí (translace) T je přímá shodnost, která je jednoznačně určena nenulovým **vektorem posunutí** $u = AA'$. Každému bodu roviny X je přiřazen jeho obraz X' tak, že platí $XX' = u$.



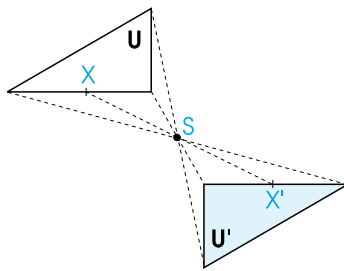
- Velikost (délka) vektoru posunutí určuje **délku posunutí**, směr vektoru posunutí určuje **směr posunutí** (tzn. úsečky XX' a AA' jsou stejně dlouhé, rovnoběžné a souhlasně orientované).
- Jelikož $u \neq o$, nemá posunutí žádné samodružné body.
- Samodružnými přímkami jsou všechny rovnoběžky s vektorem posunutí.

Otočení (rotace) R je shodné zobrazení, jednoznačně určené **středem otočení S** a **orientovaným úhlem otočení** α , jehož velikost je z intervalu $(0^\circ; 360^\circ)$. Bodu S je přiřazen též bod $S' = S$ a každý bod roviny $X \neq S$ má obraz X' , pro který platí $|SX| = |SX'|$ a $\angle XSX' = \alpha$.



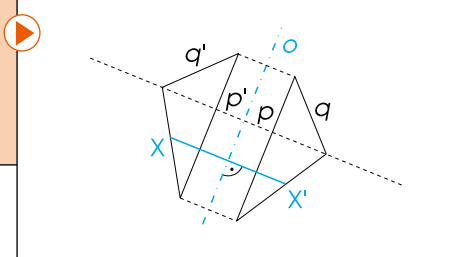
- Obraz bodu X leží na **kružnici otočení** $k(S; r = SX)$, přičemž jeho poloha je dána orientovaným úhlem **otočení**: $\angle XSX' = \alpha$.
- Otočení má pro $\alpha = 360^\circ$ všechny body samodružné, jinak má jediný samodružný bod S .
- Samodružné přímky pro $\alpha \neq 180^\circ$ a $\alpha \neq 360^\circ$ nejsou žádné, pro $\alpha = 180^\circ$ jsou samodružné všechny přímky procházející středem S , pro $\alpha = 360^\circ$ jsou samodružné všechny přímky roviny.
- Otočení vznikne složením dvou osových souměrností s různoběžnými osami.

Středová souměrnost S se středem S je přímá shodnost, která **středu S** přiřazuje též bod $S' = S$ a každému bodu roviny $X \neq S$ přiřazuje takový bod X' , že bod S je středem úsečky XX' .



- Středová souměrnost je jednoznačně určena **středem souměrnosti S**. Lze ji považovat za otočení určené středem otočení S a úhlem otočení $\alpha = \pm 180^\circ$.
- Jediným samodružným bodem středové souměrnosti je její střed S .
- Samodružnými přímkami středové souměrnosti jsou všechny přímky, které procházejí středem souměrnosti S .

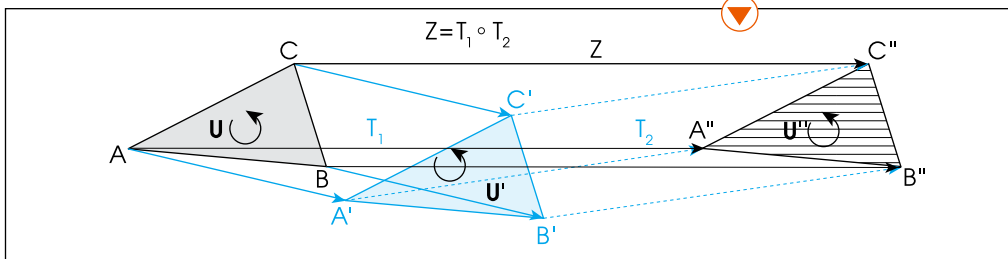
Osová souměrnost O s osou o je nepřímá shodnost, která je jednoznačně určená **osou souměrnosti o** .
Leží-li bod X na ose o , pak jeho obraz $X' = X$.
Obrazem bodů $X \in o$ jsou body X' , které leží na kolmici k ose o , přičemž úsečka XX' je osou půlena.



- Samodružnými body osové souměrnosti jsou právě všechny body osy souměrnosti.
- Samodružnými přímkami osové souměrnosti jsou osa o a všechny přímky k k ose o kolmé. Obrazem přímky p rovnoběžné s osou o je rovnoběžka p' s osou souměrnosti. Obrazem přímky $q \nparallel o$ je přímka $q' \nparallel o$; průsečík přímek q a q' leží na ose o .

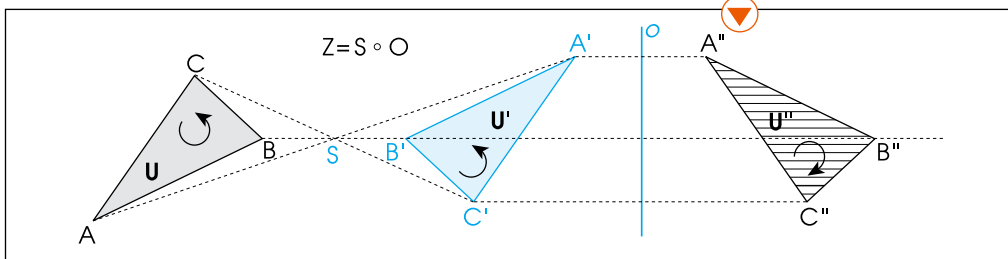
Složení dvou přímých nebo nepřímých shodností vznikne přímá shodnost:

Např.



Složení přímé a nepřímé shodnosti vznikne nepřímá shodnost:

Např.



- Útvary, pro které existuje osová souměrnost, v níž je útvar samodružný, nazýváme **osově souměrné útvary** (např. obdélník, rovnoramenný lichoběžník, rovnoramenný trojúhelník, ...).
- Útvary, k nimž existuje středová souměrnost, v níž je daný útvar samodružný, se nazývají **středově souměrné útvary** (např. čtverec, kružnice, ...).

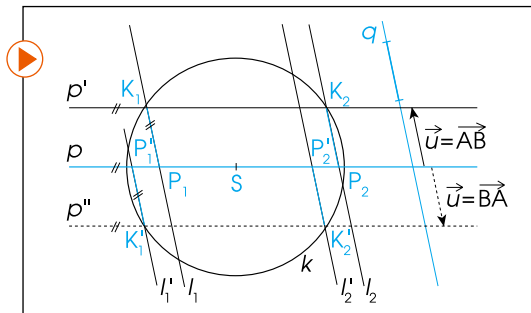
PŘÍKLADY UŽITÍ SHODNOSTI

Např.

Je dána kružnice $k(S; r)$, jejímž středem prochází přímka p . Na přímce $q \nparallel p$ je dána úsečka AB délky $|AB| < r$. Sestrojte body $P \in p$, $K \in k$ tak, aby platilo $|PK| = |AB| \wedge PK \parallel AB$.

Řešení: Rozbor:

V **posunutí T** ve směru udaném přímkou q o délku a (vektor posunutí je $\vec{u} = \vec{AB}$, resp. $\vec{u}' = \vec{AB}$) přejde přímka p v přímku p' (resp. p'') přejdou body $P \in p$ v body $K \in k$. Odtud plyne konstrukce.



Konstrukce:

1. Sestrojíme zadanou kružnici k , přímky p, q a úsečku AB .
2. p' ; p' je obraz přímky p v posunutí určeném vektorem posunutí $u = AB$
(p'' je obraz přímky p v posunutí určeném vektorem posunutí $u' = BA$).
3. K ; $K = k \cap p'$ (resp. $K = k \cap p''$)
4. l ; $l \parallel q \wedge K \in l$
5. P ; $P = l \cap p$
6. PK

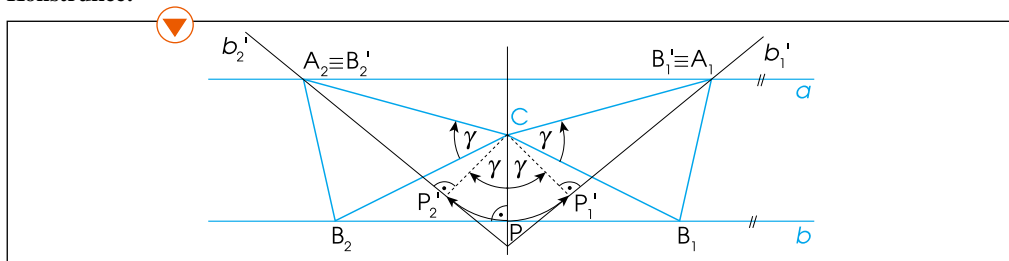
Závěr: Bod K je obrazem bodu P v posunutí určeném vektorem $u = AB$ resp. $u' = BA$. Odtud plyne $|PK| = |AB| \wedge PK \parallel AB$, $P \in p$, $K \in k$. Tedy podmínky úlohy jsou splněny.
Úloha má pro zadané hodnoty **4 řešení**.

Např. Jsou dány dvě různé rovnoběžky $a \parallel b$, uvnitř pásu, který vymezují, leží bod C a dále je dán dutý úhel o velikosti γ . Sestrojte rovnoramenný $\triangle ABC$ tak, aby $A \in a$, $B \in b$, $|\sphericalangle BCA| = \gamma$.

Řešení: Rozbor:

Předpokládejme, že hledaný $\triangle ABC$ existuje. V **otočení R** kolem bodu C o úhel γ přejde přímka b v obraz b' a bod B v B' . Vzhledem k tomu, že trojúhelník ABC je rovnoramenný, platí $|CB| = |CA|$, tedy $B' = A$. Pro bod A pak platí $A \in a \wedge A \in b'$. Odtud $A = b' \cap a$.

Konstrukce:



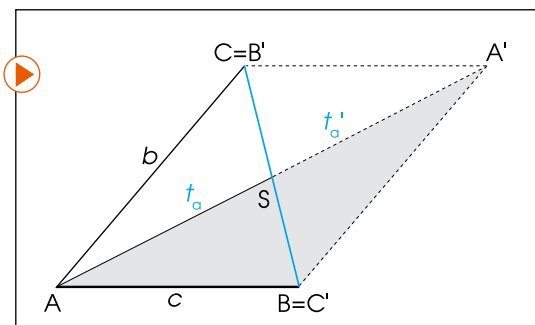
1. Sestrojíme zadané rovnoběžky $a \parallel b$ a bod C podle zadání.
2. b' ; b' je obraz přímky b v otočení se středem C o úhel γ (b_1 v kladném smyslu, b_2 v záporném smyslu).
3. A ; $A = b' \cap a$
4. B ; $B \in b \wedge |BC| = |AC|$
5. $\triangle ABC$

Závěr: Z konstrukce vyplývá, že v daném otočení je $|AC| = |BC|$, $A \in a$, $B \in b$ a $|\sphericalangle BCA| = \gamma$, tedy $\triangle ABC$ splňuje podmínky zadání. Přímky a, b' jistě nejsou rovnoběžné, neboť $\gamma < 180^\circ$. Proto mají vždy průsečík a $\triangle ABC$ existuje. Vzhledem k tomu, že můžeme použít otočení o úhel γ v kladném nebo záporném smyslu, má úloha **dvě řešení**.

Např. Sestrojte $\triangle ABC$, je-li dáno b, c, t_a .

Řešení: Rozbor:

Sestrojíme-li obraz hledaného $\triangle ABC$ ve **středové souměrnosti** se středem S , pro který platí $|SC| = |SB|$, pak dostaneme rovnoběžník $ABA'C$, jehož úhlopříčky se půlí v bodě S . V tomto rovnoběžníku platí $|AS| = |A'S|$, $|AC| = |A'C'|$. Lze tedy sestrojit podle věty sss $\triangle ABA'$ a pomocí něho i hledaný $\triangle ABC$.



Konstrukce:

1. $\triangle ABA'$; $|AB| = c$, $|BA'| = b$, $|AA'| = 2t_a$ (sss)
2. S ; $S \in AA' \wedge |SA| = |SA'|$
3. $\rightarrow BS$
4. C ; $C \in \rightarrow BS \wedge |CS| = |BS|$
5. $\triangle ABC$

poznámka

Úlohu lze řešit také doplněním $\triangle ABA'$ na rovnoběžník $ABA'C$ na základě toho, že rovnoběžník má protější strany rovnoběžné a stejně dlouhé.



Závěr: Z konstrukce $\triangle ABA'$ vyplývá, že $AB = c$, $SA = t_a$. Z konstrukce bodu A plyne, že AS je těžnice $\triangle ABC$ a že čtyřúhelník $ABA'C$ je rovnoběžník. Odtud platí $AC = BA' = b$. Je-li pro $\triangle ABA'$ splněna trojúhelníková nerovnost $|c - b| < 2t_a < c + b$, má poloha v polorovině s hranicí AB **jediné řešení**.

Např. Pro dva sklady A a B má být vybudováno nové železniční překladiště (viz obrázek) tak, aby délka silnic spojujících s oběma sklady byla co nejmenší. Určete polohu překladiště P.

Řešení: Úlohu převedeme na matematický problém: Jsou dány dva body A, B ležící v jedné polorovině s hraniční přímkou z. Určete na přímce z bod P tak, aby délka čáry APB byla co nejmenší.

Rozbor:

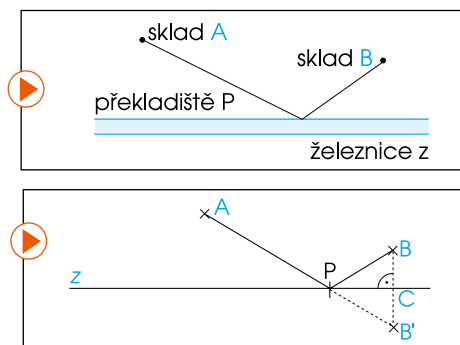
Úlohu budeme řešit pomocí **osové souměrnosti** s osou z.

V této souměrnosti je obrazem bodu B bod B' a úsečka AB' má nejmenší možnou délku, přičemž platí $|PB| = |PB'|$. Odtud vyplývá, že také délka lomené čáry APB je rovna délce úsečky AB' a je tedy minimální. Hledaný bod P je průsečíkem úsečky AB' s přímkou z. Pro všechny ostatní body $X \in z \wedge X \neq P$ je délka čáry AXB větší než délka čáry APB.

Konstrukce:

1. Sestrojíme zadané body A, B a přímku z.
2. B' ; B' je obrazem bodu B v osové souměrnosti s osou z.
3. P ; $P = AB' \cap z$

Závěr: Z vlastností osové souměrnosti vyplývá, že pro zadanou polohu skladů A, B a železnice z existuje **jediný bod P** požadovaných vlastností. (Ke stejnému závěru bychom došli, kdybychom použili obraz bodu A' v osové souměrnosti s osou z a určili $P = z \cap A'B$).



6.9. PODOBNOST A STEJNOLEHLOST

Geometrické zobrazení v rovině nazýváme **podobným zobrazením (podobností)**, je-li každému bodu roviny X přiřazen jeho obraz X' tak, že pro každé dvě uspořádané dvojice $[X;X']$ a $[Y;Y']$ vzorů a obrazů platí: $|X'Y'| = k |XY|$, kde $k > 0$ je konstanta zvaná **koefficient podobnosti**.

- Zvláštním případem podobnosti je pro $k = 1$ **shodnost**.
- Je-li $k > 1$ nazývá se podobnost **zvětšení**, pro $0 < k < 1$ **zmenšení**.
- Dva **útvary** U a U' **nazýváme podobnými**, je-li možné najít podobné zobrazení, které převádí útvar U v útvar U' . Píšeme $U \sim U'$.
- Dva **trojúhelníky** $\triangle ABC$ a $\triangle A'B'C'$ **jsou podobné**, právě když existuje takové kladné číslo k , že platí:

$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|B'C'|}{|BC|} = \frac{|A'C'|}{|AC|} = k$$



zapamatuj si

V praxi se užívají tato **kritéria podobnosti trojúhelníků**:

Dva trojúhelníky jsou podobné, jestliže:

- a) se shodují ve dvou úhlech (**uu**)
- b) se rovnají poměry délek příslušných stran a jsou-li shodné úhly těmito stranami sevřené (**sus**)
- c) jsou si rovny poměry délek dvou stran a rovnají se velikosti úhlů proti větší z nich (**Ssu**)

- Podobné trojúhelníky lze odpovídajícími výškami nebo těžnicemi nebo osami úhlů *rozložit* v podobné *trojúhelníky*. V podobných trojúhelnících jsou poměry délek odpovídajících si *výšek* stejné jako poměry délek odpovídajících si stran. Poměry obvodů podobných trojúhelníků jsou stejné jako poměry odpovídajících si stran:
 $o_1 : o_2 = a_1 : a_2 = b_1 : b_2 = c_1 : c_2 = k$ (obdobně u mnohoúhelníků).
- *Obsahy* podobných trojúhelníků jsou v poměru druhých mocnin délek odpovídajících si stran:
 $S_1 : S_2 = a_1^2 : a_2^2 = b_1^2 : b_2^2 = c_1^2 : c_2^2 = k^2$ (obdobně u mnohoúhelníků).
- V praxi *využíváme podobnost* k zvětšování a zmenšování geometrických útvarů, konstrukci plánů a map, dělení úseček v daném poměru (čtvrtá geometrická úměrnost), při důkazových úlohách atd.

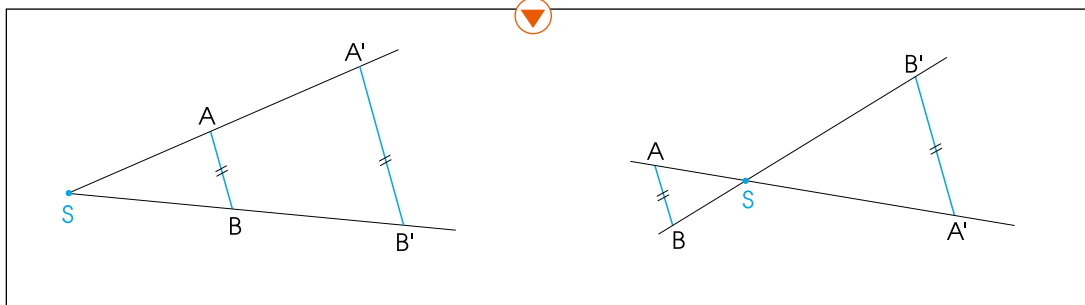
Stejnolehlost (homotetie) $H(S; \kappa)$ se **středem** S a **koeficientem stejnohlosti** $\kappa \in \mathbb{R} - \{0\}$ je podobné zobrazení v rovině, které bodu S přiřazuje jeho obraz $S' = S$ a každému bodu roviny $X \neq S$ přiřazuje bod X' takový, že pro vektory $\vec{SX}$ a $\vec{SX'}$ platí: $\vec{SX'} = \kappa \cdot \vec{SX}$.

- Každá stejnohlost s koeficientem κ je **podobnost s poměrem podobnosti** $k = |\kappa|$.
- Je-li $\kappa = -1$, jedná se o středovou souměrnost, pro $\kappa = 1$ o identitu.
- Pro $\kappa \neq 1$ má právě jeden samodružný bod, jímž je střed stejnohlosti S .
- Je-li $\kappa = 1$ jsou v dané stejnohlosti samodružné všechny body roviny.
- Útvar U a jeho obraz U' ve stejnohlosti $H(S; \kappa)$ nazýváme **útvary stejnohlé podle středu** S .
 Je-li $|\kappa| > 1$ je útvar U' zvětšený, pro $|\kappa| < 1$ zmenšený vzhledem k útvaru U .

Základní vlastnosti stejnohlosti:

1. **Obrazem libovolné přímky** p je v každé stejnohlosti $H(S; \kappa)$ přímka p' s danou přímkou rovnoběžná.
2. **Obrazem libovolné úsečky** AB je v každé stejnohlosti $H(S; \kappa)$ úsečka $A'B'$, pro kterou platí:
 $AB \parallel A'B' \wedge |A'B'| = |\kappa| \cdot |AB|$. Každé dvě rovnoběžné úsečky, které nejsou shodné, jsou stejnohlé dvěma způsoby.

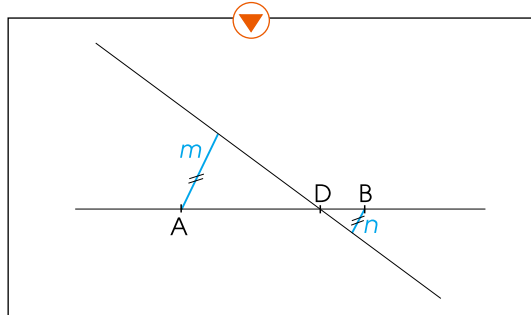
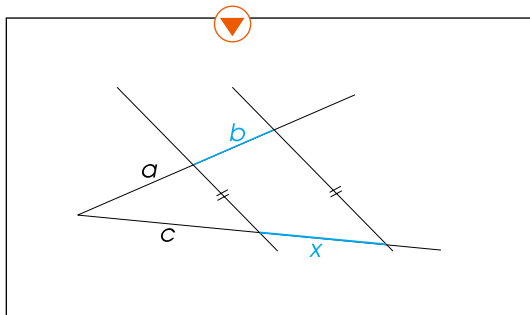
Např. Stejnolehlost rovnoběžných úseček:



Platí: $|SA| : |SA'| = |SB| : |SB'|$ nebo $|SA| : |AA'| = |SB| : |BB'|$

Odtud **čtvrtá geometricky úměrná je úsečka** délky x , pro kterou platí $a : b = c : x$.

Pomocí stejnohlosti lze získat bod D, který **dělí úsečku AB v daném poměru $m : n$**
 $|AD| : |DB| = m : n$

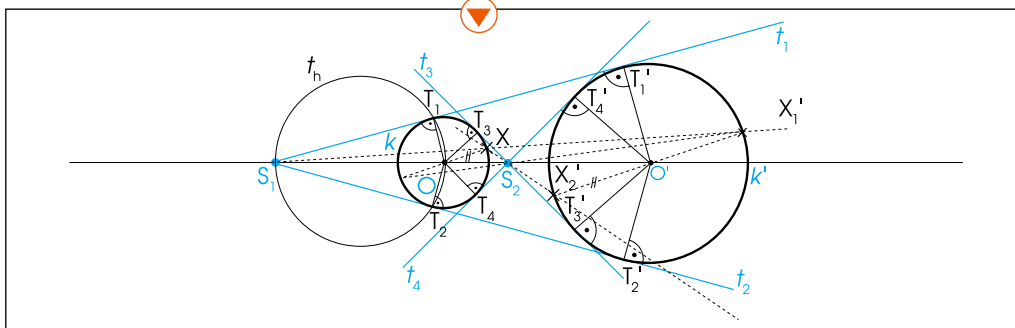


Každé **dvě kružnice** $k(O; r)$ a $k'(O'; r')$ s různými poloměry jsou **stejnolehle právě dvěma způsoby**.

Středů stejnohlostí S_1 a S_2 leží na přímce procházející středy kružnic a koeficienty stejnohlostí jsou $\kappa = \frac{r'}{r}$, $\kappa = -\frac{r'}{r}$. Bod S_2 , který leží uvnitř úsečky OO' je **vnitřní střed stejnohlosti**, bod S_1 ležící vně úsečky OO' je **vnější střed stejnohlosti**.

Mají-li dvě kružnice **společné tečny**, pak tyto tečny procházejí příslušnými středy stejnohlosti.

Např. Stejnolehlost kružnic a konstrukce společných tečen kružnic s různými poloměry.



Konstrukce:

1. $\triangle A'B'C'$; $|B'C'| = 3 \text{ cm}$, $|A'C'| = 4 \text{ cm}$, $\gamma' = 90^\circ$
2. P' (pata výšky $v_{c'}$ v $\triangle A'B'C'$)
3. P ; $P \in \rightarrow C'P' \wedge |PC'| = v_c$
4. A ; A je obrazem bodu A' ve stejnolehlosti $H(C; \kappa)$
5. B ; B je obrazem bodu B' ve stejnolehlosti $H(C; \kappa)$
6. $\triangle ABC$

Závěr: Z konstrukce $\triangle ABC$ vyplývá, že tento trojúhelník je stejnohlý s $\triangle A'B'C'$. Proto je $\gamma = 90^\circ$, $\frac{|BC|}{|AC|} = \frac{|B'C'|}{|A'C'|} = \frac{3}{4}$.

Na polopřímce CP' existuje jediný bod P , pro který je $|CP| = v_c$. Podmínkám úlohy vyhovuje **jediný trojúhelník ABC**.

Výpočty: $\triangle ABC$ je pravoúhlý, tedy $c' = \sqrt{a'^2 + b'^2} = 5 \text{ cm}$. Jeho obsah $S' = \frac{3 \cdot 4}{2} \text{ cm}^2 = 6 \text{ cm}^2$.

$$\text{Odtud } v'_c = \frac{2S'}{c'} = 2,4 \text{ cm. Pak } \kappa = \frac{|CP|}{|C'P'|} = \frac{v_c}{v'_c} = \frac{4,8}{2,4} = 2.$$

$$\text{Obvod } O' = a' + b' + c' \Rightarrow O' = 12 \text{ cm.}$$

Stejnolehle trojúhelníky jsou také podobné, proto pro jejich obvod a obsah platí:

$$O = 2 \cdot 12 \text{ cm} = 24 \text{ cm} \quad S = 4 \cdot 6 \text{ cm}^2 = 24 \text{ cm}^2$$

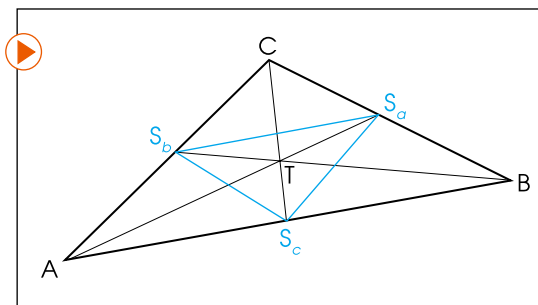
Obvod $\triangle ABC$ je 24 cm, obsah 24 cm².

Např. Dokažte, že těžiště trojúhelníku dělí těžnici v poměru 2 : 1.

Důkaz pomocí stejnolehlosti:

Střední příčky trojúhelníku jsou rovnoběžné s jeho stranami. Ze základních vlastností stejnolehlosti vyplývá, že $\triangle S_a S_b S_c$ je stejnohlý s $\triangle ABC$ ve stejnolehlosti se středem v těžišti T . Jelikož je délka střední příčky rovna polovině délky příslušné strany trojúhelníku, jedná se o stejnohlost s koeficientem $\kappa = -1/2$.

V této stejnolehlosti platí: $|AT| = 2|TS_a|$, $|BT| = 2|TS_b|$, $|CT| = 2|TS_c|$ c.b.d.

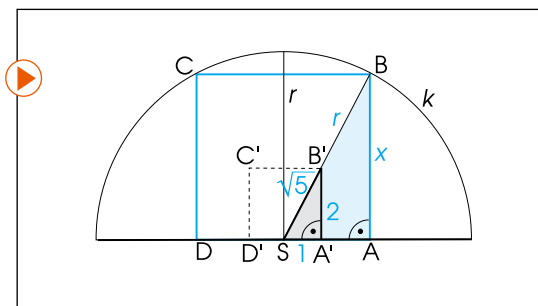


Např. Určete délku strany x největšího čtverce, který je možné vyříznout z plechové tabule tvaru půlkruhu a poloměru r .

Řešení: Narýsujeme pomocný čtverec $A'B'C'D'$ o straně délky $2j$, který umístíme tak, aby střed strany $A'D'$ byl středem stejnolehlosti S . V této stejnolehlosti získáme bod B jako průsečík polopřímky SB s kružnicí k , bod C je průsečík polopřímky SC' s kružnicí k . Úsečka CB je stranou hledaného čtverce. Čtverce $A'B'C'D'$ a $ABCD$ jsou stejnohlé. Stejnolehle (a tedy i podobné) jsou také $\triangle SA'B'$ a $\triangle SAB$.

$$\text{Odtud: } \frac{|A'B'|}{|B'S|} = \frac{|AB|}{|BS|} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{x}{r} \Rightarrow x = \frac{2r}{\sqrt{5}}$$

Největší čtverec, který bude vyříznut z dané tabule plechu, má stranu délky $x = \frac{2r}{\sqrt{5}}$.

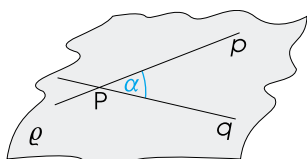


6.10. STEREOMETRIE

- Stereometrie se zabývá geometrickými útvary v prostoru.
- Dvě přímky v *prostoru* nazýváme:
 - různoběžky**, mají-li společný právě jeden bod
 - rovnoběžky**, leží-li v jedné rovině a nemají společný žádný bod
 - mimoběžky**, neleží-li v jedné rovině a nemají společný žádný bod

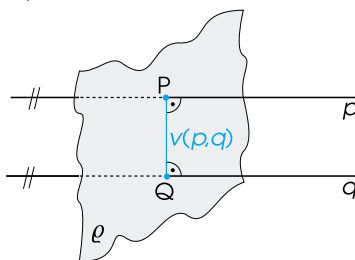
Např. Při řešení praktických úloh zpravidla určujeme

a) **odchylku různoběžek**
 $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$

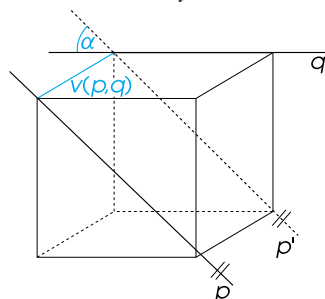


(je-li $\alpha = 90^\circ$, jsou přímky na sebe **kolmé**)

b) **vzdálenost dvou rovnoběžek**



c) **vzdálenost a odchylku mimoběžek**

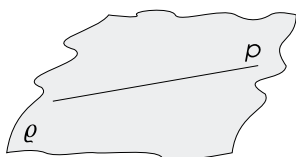


(úlohu převedeme na odchylku různoběžek p' , q a vzdálenost rovnoběžek p a p' .)

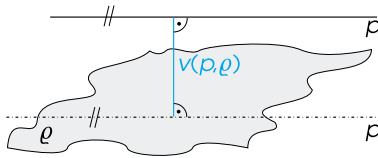
- Přímka a rovina mohou mít tuto vzájemnou polohu:
 - přímka p leží v rovině ρ** , je-li každý bod přímky bodem roviny ($p \subset \rho$)
 - přímka p je rovnoběžná s rovinou ρ** , nemá-li s rovinou žádný společný bod ($p \cap \rho = \emptyset$)
 - přímka p je různoběžná s rovinou ρ** , má-li s rovinou právě jeden společný bod ($P = p \cap \rho$)

Např.

a) **přímka p leží v rovině ρ**

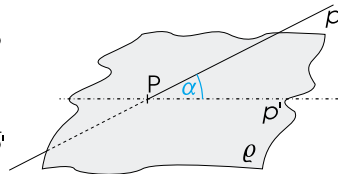


b) **přímka p je rovnoběžná s rovinou ρ**



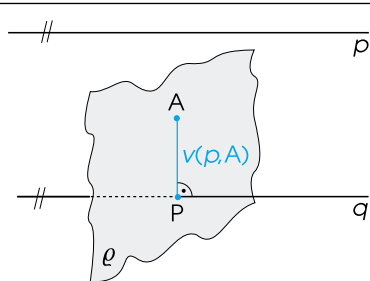
Vzdálenost přímky p od roviny ρ určíme pomocí vzdálenosti přímky p od jejího pravouhlého průmětu p' do roviny ρ .

c) **přímka p je různoběžná s rovinou ρ**



Odchylka přímky α roviny je dána odchylkou přímky p od jejího pravouhlého průmětu p' do roviny ρ .

Např. Vzdálenost bodu A od přímky p určíme pomocí roviny ϱ vedené bodem A kolmo k přímce p :
 $v(p, A) = v(P, A)$.

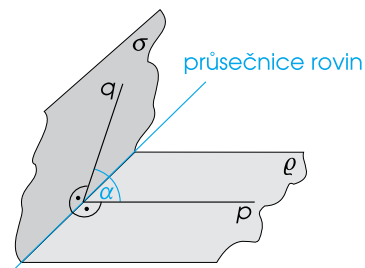


■ Dvě různé roviny ϱ a σ jsou:

- rovnoběžné**, pokud nemají žádný společný bod
- různoběžné**, mají-li společnou přímku zvanou *přísečnice rovin*

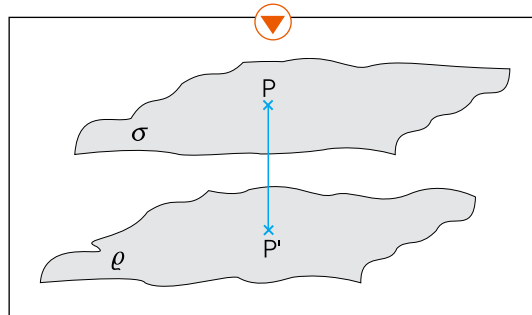
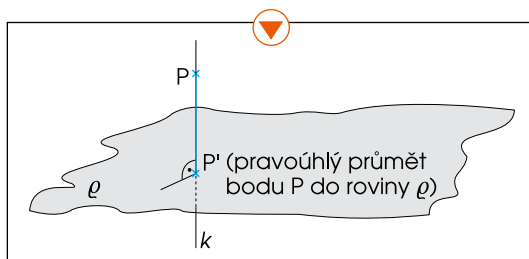
Např. **Postup při určení odchylky rovin**
 $(\alpha \in \langle 0^\circ, 90^\circ \rangle)$:

- Libovolným bodem přísečnice vedeme přímku p kolmo k přísečnici a ležící v rovině ϱ a přímku q kolmo k přísečnici a ležící v rovině σ .
 - Odchylka rovin ϱ a σ je dána odchylkou přímek p a q .
- Je-li $\alpha = 90^\circ$, jsou roviny navzájem kolmé.

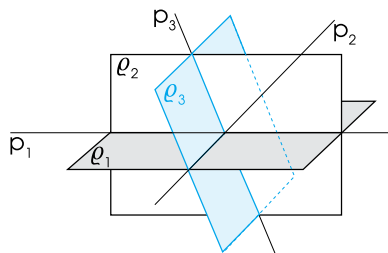
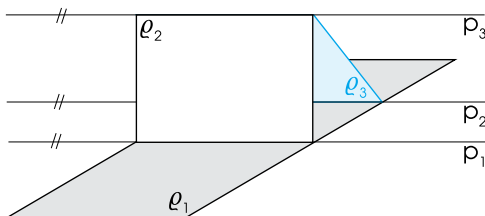
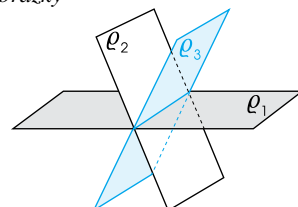
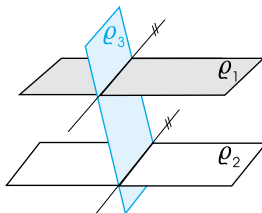
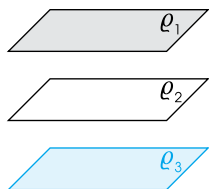


Např. **Vzdálenost bodu od roviny**
určíme jako vzdálenost bodu P od jeho pravouhlého průmětu P' do roviny ϱ .

Vzdálenost rovnoběžných rovin převedeme na vzdálenost bodu od roviny.



Vzájemnou polohu tří různých rovin znázorňují obrázky



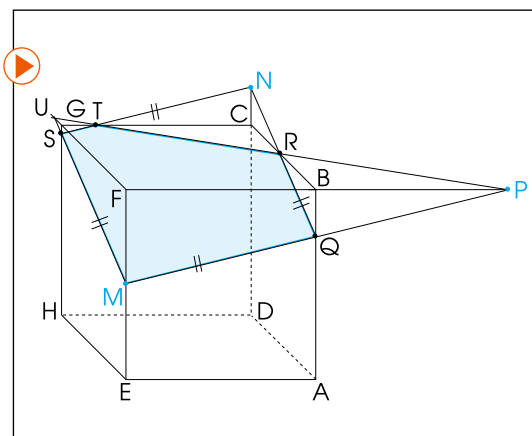
6.11. GEOMETRICKÁ TĚLESA

- **TĚLESA** zobrazujeme zpravidla ve volném rovnoběžném promítání, které má tyto vlastnosti:
- rovinné obrazce ležící v rovinách rovnoběžných s nákresem se zobrazí jako shodné útvary
 - průměty dvou rovnoběžek jsou rovnoběžky, nebo dva různé body
 - dvě rovnoběžné a shodné úsečky se zobrazí buď jako rovnoběžné shodné úsečky, nebo jako dva body
 - střed úsečky se zobrazí do středu jejího obrazu

Např. Sestrojte řez krychle ABCDEFGH rovinou MNP, kde M je střed strany EF, N leží na polopřímce DC tak, že $|DC| : |CN| = 5:1$, B je středem úsečky FP.

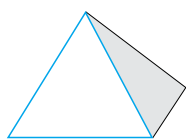
Řešení:

- Přímka PM leží v rovině ABFE a protíná hranu krychle v bodě Q.
- Přímka SN $\parallel$ MP, neboť obě přímky leží v rovnoběžných rovinách. Vedeme-li bodem N rovnoběžku s přímkou MP, protne tato rovnoběžka hranu krychle GC v bodě T a hranu krychle HG v bodě S.
- Přímka QN protíná hranu krychle BC v bodě R.
- Body MQRTS určují řez krychle rovinou MNP.

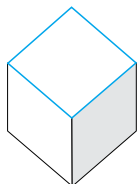


Mnohostěn je množina všech bodů v prostoru ležících uvnitř a na mnohostěnové ploše, která je sjednocením n hraničních mnohoúhelníků ($n \geq 4$) ležících v různých rovinách tak, že strana každého z nich je zároveň stranou jiného mnohoúhelníku.

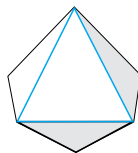
Např. Existuje právě pět *pravidelných mnohostěnů* (stěny jsou pravidelné mnohoúhelníky):



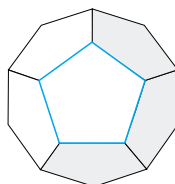
čtyřstěn
(tetraedr)



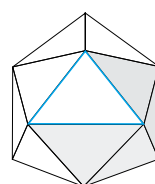
šestistěn
(hexaedr)



osmistěn
(oktaedr)



dvanáctistěn
(dodekaedr)

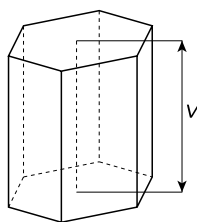


dvacetistěn
(íkosaedr)

Zvláštní případy mnohostěnů jsou hranol a jehlan:

zapamatuj si

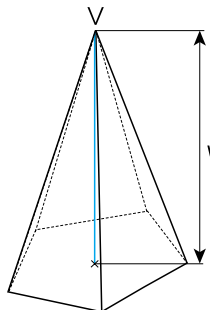
Hranol má dvě shodné *podstavy*, které leží v rovnoběžných rovinách. Vzdálenost podstav je *výška* hranolu. *Plášť* hranolu tvoří ostatní *stěny* (rovnoběžníky) hranolu. Podle počtu stěn rozlišujeme hranol trojboký, čtyřboký, pětiboký atd. *Kolmý hranol* má roviny stěn kolmé k rovinám podstavy. Je-li podstavou kolmého hranolu pravidelný n -úhelník je to *hranol pravidelný*. Čtyřboký hranol, jehož podstavou je rovnoběžník, se nazývá *rovnoběžnostěn*. **Kvádr** je kolmý rovnoběžnostěn, jehož podstavou je pravoúhelník. Má všechny tělesové úhlopříčky stejně dlouhé. **Krychle** je kolmý hranol, jehož všechny stěny jsou čtverce.



Objem $V = S_p \cdot v$
 Povrch $S = 2S_p + S_{pl}$
 S_p ... plocha podstavy
 S_{pl} ... plocha pláště
 v ... výška

zapamatuj si

Jehlan je mnohostěn, jehož podstavou je mnohoúhelník a boční stěny jsou trojúhelníkové. Společný bod všech bočních stěn je *vrchol* jehlanu. Vzdálenost vrcholu od roviny podstavy je *výška* jehlanu. Podle počtu bočních stěn rozeznáváme jehlan trojboký, čtyřboký atd. Jehlan se nazývá *kolmý*, jestliže existuje kružnice vepsaná jeho podstavě a kolmice vedená vrcholem jehlanu prochází právě jejím středem. Je-li podstavou jehlanu pravidelný mnohoúhelník, hovoříme o *pravidelném jehlanu*. Jehlan, který není kolmý, se nazývá *kosý*. Rovina rovnoběžná s rovinou podstavy rozdělí jehlan na dvě tělesa – jehlan a *komolý jehlan*. *Pláštěm* jehlanu nazýváme sjednocení všech jeho bočních stěn. *Povrchem* jehlanu je sjednocení všech jeho stěn (včetně podstav).



Objem $V = \frac{1}{3} S_p \cdot v$
 Povrch $S = S_p + S_{pl}$
 S_p ... plocha podstavy
 S_{pl} ... plocha pláště
 v ... výška

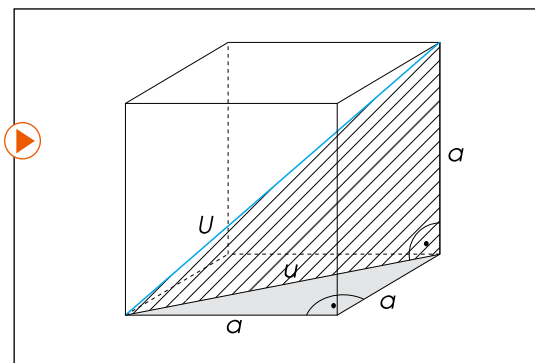
Např. Vypočítejte povrch a objem krychle, je-li délka tělesové úhlopříčky této krychle $5\sqrt{3}$ cm.

Řešení: $U = 5\sqrt{3}$

$$5\sqrt{3} \text{ cm} = a\sqrt{3} \Rightarrow a = 5 \text{ cm}$$

$$V = a^3 \Rightarrow V = 125 \text{ cm}^3$$

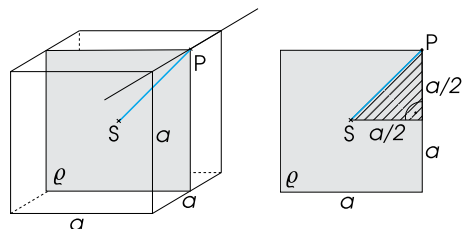
$$S = 6a^2 \Rightarrow S = 150 \text{ cm}^2$$



Např. V krychli o hraně délky a určete vzdálenost hrany krychle od jejího středu.

Řešení: Středem krychle S proložíme rovinu ϱ kolmou k dané hraně krychle. Určíme průsečík P této roviny s hranou krychle. Vzdálenost středu krychle S od hrany je rovna délce úsečky SP .

$$|SP| = \frac{a}{2}\sqrt{2}$$



Např. Řezem krychle $ABCD A' B' C' D'$ rovinou $\varrho \equiv S_{AB} S_{BC} B$ vznikne jehlan. Vypočtete jeho objem.

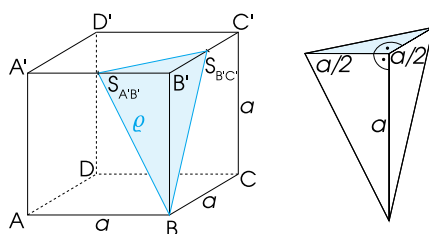
Řešení: Objem jehlanu je: $V = \frac{1}{3} S_p \cdot V$

Podstavou je pravoúhlý rovnoramenný

trojúhelník, jehož obsah je: $S_p = \frac{a^2}{8}$

Výška jehlanu je rovna délce hraně krychle a .

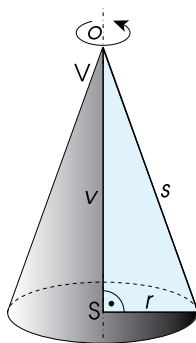
$$\text{Odtud: } V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{8} \cdot a = \frac{a^3}{24}$$



Rotační tělesa vzniknou rotací vhodného rovinného útvaru kolem osy o .

zapamatuj si

Rotační kužel je těleso, které vznikne rotací **pravoúhlého trojúhelníku** kolem jeho jedné odvěsny – výšky kužele v . Druhá odvěsna je **poloměr podstavy** r a přepona $s = \sqrt{r^2 + v^2}$ je **délka strany** rotačního kužele. **Podstavou** rotačního kužele je kruh. Rozvinutím jeho **pláště** do roviny dostaneme kruhovou výseč. **Povrch** kužele je sjednocení jeho podstavy a pláště. **Komolý kužel** vznikne jako průnik kužele a vrstvy určené rovinou podstavy a rovinou s ní rovnoběžnou, která má s kuzelem společné alespoň dva body. **Tloušťka** vrstvy je pak výškou komolého kužele.



Objem

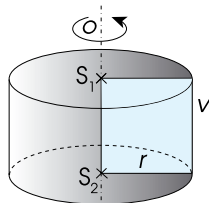
$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot v$$

Povrch

$$S = \pi r^2 + \pi r s = \pi r (r + s)$$

zapamatuj si

Rotační válec vznikne rotací **obdélníku** kolem jeho jedné strany. Tato strana je osa válce, její délka určuje velikost výšky v , délka druhé strany obdélníku určuje *poloměr podstavy* válce r . Válec má kruhové podstavy a *plášť*, který po rozvinutí do roviny dává obdélník. Rotační válec má stěny kolmé na roviny kruhových podstav, je to *kolmý kruhový válec*. *Povrchem* válce je sjednocení obou podstav a pláště.

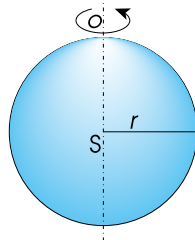


$$\text{Objem } V = \pi r^2 \cdot v$$

$$\text{Povrch } S = 2\pi r(r + v)$$

zapamatuj si

Koule je rotační těleso vytvořené rotací **kruhu** kolem jeho průměru. Střed kruhu je *středem koule*, poloměr kruhu je poloměr koule r . Povrch koule je *kulová plocha*, která je tvořena všemi body, jejichž vzdálenost od středu koule S je rovna poloměru koule r . Při řezu koule rovinou dostaneme dvě *kulové úseče* (rovina procházející středem S dělí kouli na dvě polokoule) a kulová plocha se rozdělí na dva *vrchlíky*. Dvě rovnoběžné roviny dělí kouli na *kulovou vrstvu*, jejíž plášť se nazývá *kulový pás*. Průnik koule s rotačním kuželem, který má vrchol ve středu koule a výšku větší než poloměr koule, je *kulová výseč*.

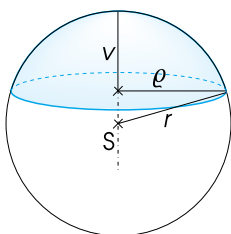


$$\text{Objem } V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$\text{Povrch } S = 4\pi r^2$$

Např.

Kulová úseč a vrchlík



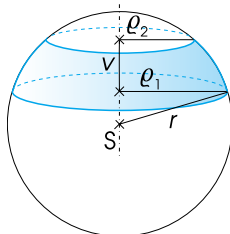
$$V = \frac{\pi v}{6} (3\rho^2 + v^2) = \frac{1}{3} \pi v^2 (3r - v)$$

$$S_{\text{pl}} = 2\pi r v = \pi(\rho^2 + v^2)$$

(obsah kulového vrchlíku)

$$S = \pi(2rv + \rho^2) = \pi(v^2 + 2\rho^2) = \pi v(4r - v)$$

Kulová vrstva a pás



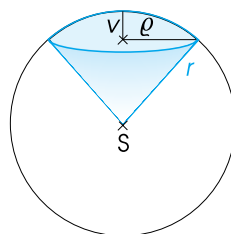
$$v = \frac{\pi v}{6} (3\rho_1^2 + 3\rho_2^2 + v)$$

$$S_{\text{pl}} = 2\pi r v$$

(obsah kulového pásu)

$$S = \pi(2rv + \rho_1^2 + \rho_2^2) = \pi(dv + \rho_1^2 + \rho_2^2)$$

Kulová výseč



$$V = \frac{2\pi r^2 v}{3}$$

$$S = \pi r(2v + \rho)$$

Cvičení 6

- 6.1 Na ciferníku hodinek vyznačte trojúhelník, který spojuje body odpovídající číslům 1, 4 a 9. Vypočtěte vnitřní úhly tohoto trojúhelníku.
- 6.2 Vypočtěte velikosti úhlů, které svírají těžnice v rovnostranném trojúhelníku.
- 6.3 Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno t_a , t_b , v_a .
- 6.4 Sestrojte úsečku délky $\sqrt{7}$ cm.
- 6.5 Je dána krychle ABCDA'B'C'D' o hraně délky a . Určete vzdálenost průsečnice rovin $\varrho = ACC'$ a $\sigma = DBB'$ od hrany krychle A'D'.
- 6.6 Je dána krychle ABCDA'B'C'D'. Určete odchylku přímk AB' a BD'.
- 6.7 Dokažte Euklidovu větu o výšce v pravoúhlém trojúhelníku.
- 6.8 O kolik procent se zvětší objem krychle, jestliže se její hrana zvětší o jednu pětinu?
- 6.9 V jakém poměru je objem krychle a objem největší koule, kterou lze do této krychle vepsat?
- 6.10 Z jaké výšky nad Zemí spatří kosmonaut 10 % zemského povrchu?
- 6.11 Parcela má tvar rovnostranného trojúhelníka o délce strany 50 m. Jak dlouhá musí být cesta vedená přes parcelu rovnoběžně s její jednou stranou tak, aby plochu parcely půlila?
- 6.12 Sestrojte kosočtverec o straně délky $a = 5$ cm, jestliže pro jeho úhlopříčky platí $e : f = 6 : 2$. Jakou délku mají úhlopříčky?
- 6.13 V zemním vrtu tvaru válce dosahuje voda do výše 11 m. Vnoříme-li do vrtu válcovitou tyč o poloměru 2 cm tak, aby dosáhla až na dno, stoupne voda ve vrtu o 4,4 m. Jaký je průměr vrtu?
- 6.14 Zobrazte řez krychle ABCDA'B'C'D' rovinou $\varrho \equiv S_{AD} S_{DC} S_{AB}$ a vypočtěte objem jehlanu, jehož podstavou je řez krychle rovinou a hlavní vrchol je bod B'.

Test 6

- 6.1 Jaké jsou velikosti vnitřních úhlů v trojúhelníku, jehož strany tvoří úsečky, které na ciferníku hodinek spojují body odpovídající číslům 2, 4 a 11?
- 6.2 Sestrojte trojúhelník ABC, je-li: $\gamma = 90^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $t_c = 2,5$ cm. Pak vypočtěte délku strany a .
- 6.3 Pomocí Euklidovy věty sestrojte úsečku délky $\sqrt{5}$ cm.
- 6.4 Vyjádřete délku těžnice t rovnostranného trojúhelníka pomocí délky jeho strany a .
- 6.5 Je dána krychle ABCDA'B'C'D'. Jaká je vzájemná poloha průsečnice rovin ABC' a DCA' a tělesové úhlopříčky krychle?
- 6.6 Je dán kvádr ABCDA'B'C'D'. Označme S_1 střed jeho hrany AB, S_2 střed hrany BC, S_3 střed hrany BB'. Při řezu hranolu rovinou $S_1 S_2 S_3$ vznikne čtyřstěn $S_1 S_2 S_3 B$. Kolik těchto čtyřstěnů je potřeba ke složení původního hranolu?
- 6.7 Je dána krychle ABCDA'B'C'D'. Jaká je odchylka rovin ABC' a ACA'?
- 6.8 Do papírové krabice tvaru krychle je vloženo pouzdro tvaru válce co největšího objemu a do tohoto pouzdra je uložena co největší koule. V jakém poměru jsou objemy těchto těles?
- 6.9 Sestrojte trojúhelník ABC, je-li: $t_a = 6$ cm, $t_b = 4,5$ cm, $t_c = 3$ cm.
- 6.10 Osovým řezem válce je čtverec o obsahu 36 cm^2 . Určete povrch válce.

7. Analytická geometrie

7.1. SOUSTAVA SOUŘADNIC

- **Analytická geometrie** převádí geometrické problémy na algebraické a řeší je pomocí *vektorové algebry* a *metody souřadnic*. Nejprve vyjádří geometrický útvar početně pomocí souřadnic, daný početní problém algebraicky vyřeší a výsledek opět geometricky vyloží. Podstata této metody vychází z přiřazení bodů prostoru, popř. roviny či přímky číselným množinám zavedením soustavy souřadnic.



zapamatuj si

- **Soustavu souřadnic** zavádíme takto:

- 1) zvolíme **počátek soustavy** souřadnic 0
- 2) počátkem 0 vedeme přímky zvané **osy** souřadnic (v prostoru x, y, z , v rovině x, y , na přímce osa x)
- 3) osy **zorientujeme** (určíme kladný a záporný směr od počátku, čímž se osa souřadnic rozdělí na kladnou a zápornou poloosu, kladná poloosa se často značí šipkou)
- 4) zvolíme **jednotky** na osách

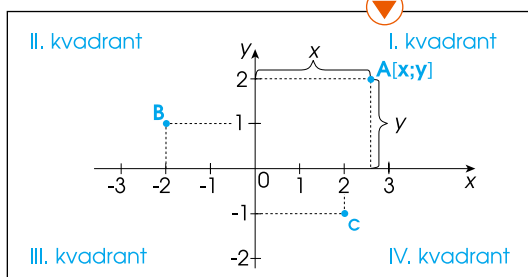
- V praxi se nejčastěji pracuje s pravoúhlou soustavou souřadnic, která má osy kolmé, na všech osách jednotky stejné délky a nazývá se **kartézská soustava souřadnic (ortonormální soustava)**.
- V takto zvolené soustavě souřadnic je každému bodu přiřazena uspořádaná n -tice reálných čísel zvaných **souřadnice bodu** a naopak každá uspořádaná n -tice reálných čísel udává polohu právě jednoho bodu ve zvolené soustavě souřadnic.
- **soustava souřadnic na přímce 0_x :**



Číslo x se nazývá **souřadnice bodu A**. Zápis $A[x]$ čteme: „bod A o souřadnici x “.

Např. $A[2,3]$; $B[-2]$; $C[3]$

- **soustava souřadnic v rovině 0_{xy} :**

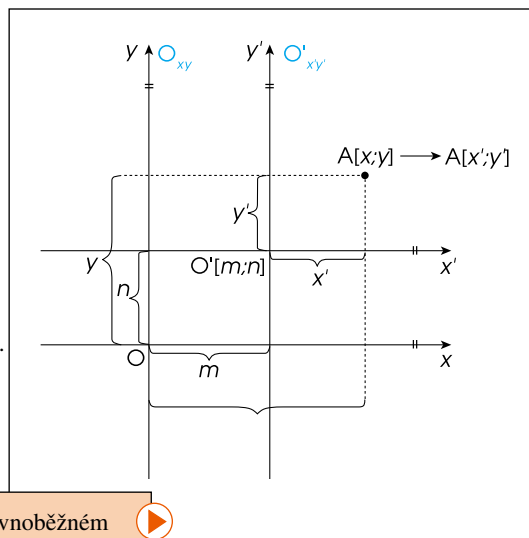


Číslo x je **první souřadnice bodu A (souřadnice x)**, číslo y se nazývá **druhá souřadnice bodu A (souřadnice y)**.

Např. $A[2,6]$; $B[-2, 1]$; $C[2, -1,5]$

Soustava rozdělí rovinu na čtyři části (kvadranty).

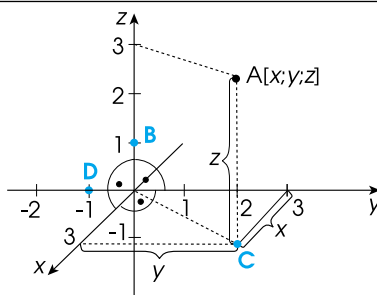
Soustava se používá také při počítání s komplexními čísly, v goniometrii atd.



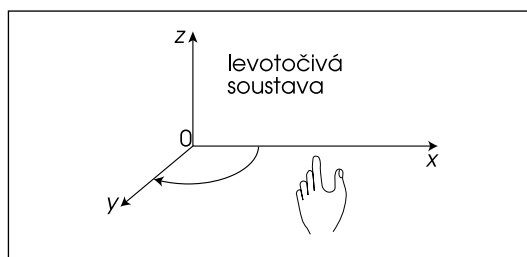
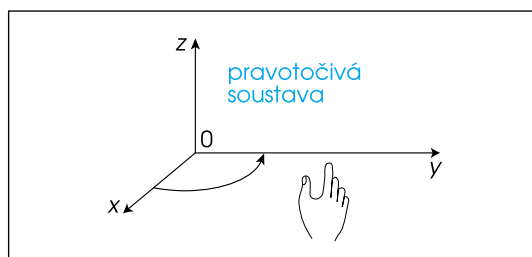
$$x' = x - m; y' = y - n \Rightarrow x = x' + m; y = y' + n$$

■ soustava souřadnic v prostoru 0_{xyz} :

Např. $A[3;3;3]$, $B[0;0;1]$,
 $C[3;3;0]$, $D[0;-1;0]$



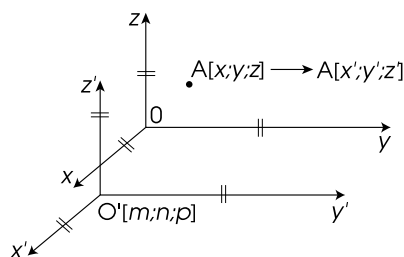
■ v praxi se užívá soustava *pravotočivá* a *levotočivá*:



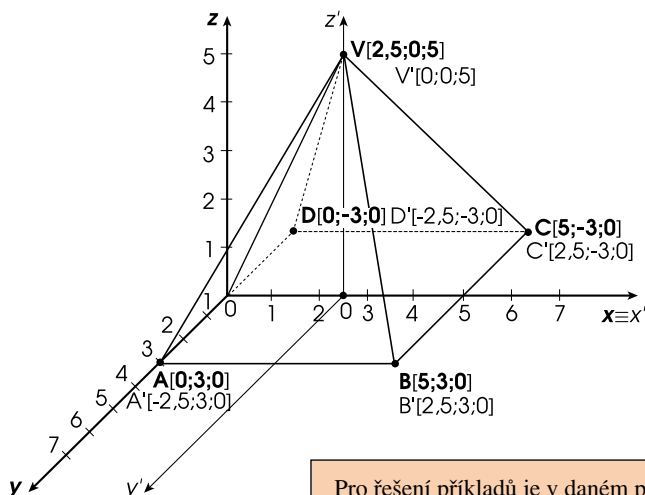
■ Číslo x je **první souřadnice** bodu A (**souřadnice x**), číslo y je **druhá souřadnice** bodu A (**souřadnice y**), číslo z je **třetí souřadnice** bodu A (**souřadnice z**).

■ Pro transformaci souřadnic při rovnoběžném posunutí (podle obr.) platí:

$$\begin{cases} x' = x - m \\ y' = y - n \\ z' = z - p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' + m \\ y = y' + n \\ z = z' + p \end{cases}$$



Např. Transformace souřadnic:



Pro řešení příkladů je v daném případě vhodnější soustava $0'_{x'y'z'}$

V soustavě 0_{xyz} platí:

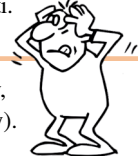
$A[0;3;0]$
 $B[5;3;0]$
 $C[5;-3;0]$
 $D[0;-3;0]$
 $V[2,5;0;5]$

V soustavě $0'_{x'y'z'}$ platí:

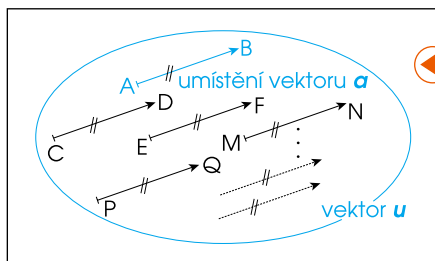
$A'[-2,5;3;0]$
 $B'[2,5;3;0]$
 $C'[2,5;-3;0]$
 $D'[2,5;-3;0]$

zapamatuj si

Vektorem nazýváme množinu všech souhlasně orientovaných úseček téže velikosti.

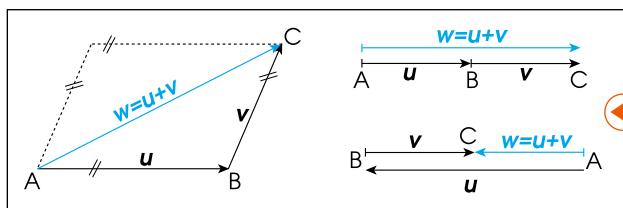


- Užívá se též název **volný vektor**. Vzhledem k tomu, že se budeme zabývat volnými vektory, přívlastek „volný“ vynecháme (bude uveden jen v případech nutnosti upřesnit úlohu s vektory).
- Každou orientovanou úsečku AB , která představuje vektor u nazýváme **umístěním vektoru u** . Je-li vektor u jednoznačně určen svým umístěním AB , pak píšeme $u = AB$. Jsou-li dvě orientované úsečky AB, CD umístěním téhož vektoru, pak říkáme, že vektory AB a CD jsou si rovny a píšeme $AB = CD$.



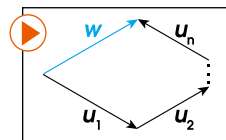
- Množina všech orientovaných úseček, u nichž splývá počáteční bod s koncovým, se nazývá **nulový vektor** a značí se o .
- Velikost vektoru $u = AB$** je dána velikostí orientované úsečky AB . Označují se $|u|$, resp. $|AB|$. Platí $|o| = 0$.
- Jsou-li orientované rovnoběžné úsečky AB, CD **souhlasně (nesouhlasně) orientovány**, pak se vektory AB, CD nazývají **souhlasně (nesouhlasně) rovnoběžné**.

- Vektory u a v se nazývají **kolineární**, právě když jejich libovolná umístění jsou navzájem rovnoběžná (jsou-li souhlasně rovnoběžná, píšeme $u \uparrow v$, jsou-li nesouhlasně rovnoběžná $u \nparallel v$).
- Leží-li libovolná umístění vektorů u, v v navzájem rovnoběžných rovinách, říkáme, že vektory jsou **komplanární**.



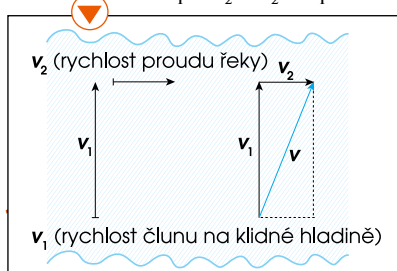
Součet vektorů $u + v$ zavádíme takto: umístíme vektor u tak, aby jeho počátečním bodem byl bod A, koncovým bodem B. Pak umístíme vektor v , aby měl počáteční bod B, koncový C. Vektor $w = AC$ je součtem vektorů u, v .

- Vektorový součet $u + v$ provádíme v praxi pomocí „**vektorového rovnoběžníku**“ (např. ve fyzice skládání sil, rychlostí...).
- Sčítání vektorů lze zobecnit: $w = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ (vektorový n -úhelník).
- Pro sčítání vektorů platí **komutativní, asociativní a distributivní zákon**.



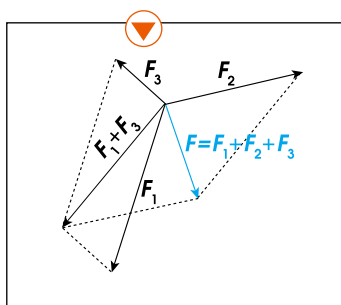
Např. a) skládání rychlostí:

- v_2 rychlost proudu řeky
- v_1 rychlost člunu na klidné hladině
- v rychlost člunu v proudící řece
- $v = v_1 + v_2 = v_2 + v_1$

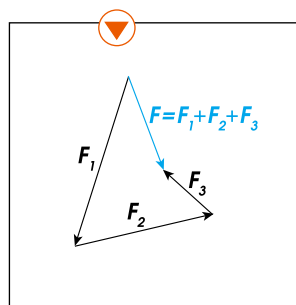


b) skládání sil:

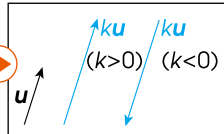
1. Postupným skládáním



2. Pomocí n-úhelníku

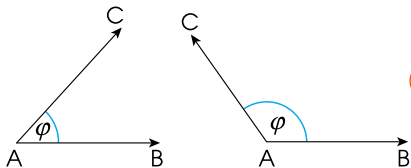
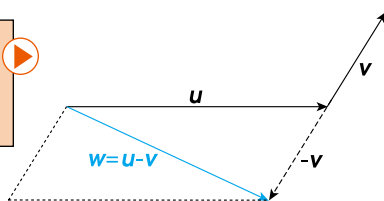


Násobení vektoru číslem. Je-li k libovolné reálné číslo, u libovolný vektor, pak *součinem čísla k a vektoru u* nazýváme vektor, který má velikost $|k| \cdot |u|$ a je pro $k > 0$ s vektorem u *souhlasně rovnoběžný* ($u \parallel ku$), pro $k < 0$ *nesouhlasně rovnoběžný* ($u \nparallel ku$). Je-li $k = 0$, je ku nulový vektor.



- Vektor u je *kolineární* s vektorem ku . (Zápis $v = ku$ pro nenulové vektory znamená, že v a u jsou vždy *rovnoběžné*).
- Vynásobíme-li vektor u číslem $k = -1$, dostaneme **vektor opačný** k vektoru u . Označujeme ho $-u$. Vektor opačný $-u$ vznikne z vektoru u tak, že v každém jeho umístění zaměníme počáteční bod za koncový a naopak.
- Velikost opačného vektoru je stejná jako velikost vektoru původního: $|u| = |-u|$.

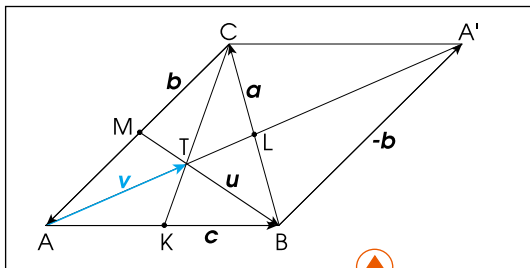
Rozdíl vektorů $u - v$ dostaneme, když k vektoru u přičteme vektor opačný k vektoru v , tj. vektor $-v$.
 $w = u + (-v); \quad w = u - v$



◀ **Úhlem dvou nenulových vektorů $u = AB, v = AC$** , které mají umístění AB, AC se společným počátkem A , je *konvexní úhel* BAC o velikosti $\varphi = |\sphericalangle BAC|$, kde $\varphi \in \langle 0^\circ; 180^\circ \rangle$. Je-li alespoň jeden z vektorů nulový, úhel dvou vektorů nedefinujeme.

Lineární kombinací vektorů $v_1, v_2, \dots, v_n$ nazýváme vektor v , který lze vyjádřit ve tvaru: $v = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n$, kde $k_1, k_2, \dots, k_n$ jsou reálná čísla. Vektory $v_1, v_2, \dots, v_n$ ($n \in \mathbb{N}, n > 1$) se nazývají *lineárně závislé vektory*, lze-li jeden z nich vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních. Nejsou-li lineárně závislé, nazývají se *lineárně nezávislé vektory*.

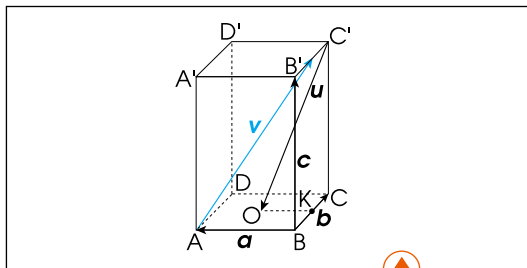
Např. Příklady lineárních kombinací vektorů:



$$v = \frac{2}{3}(AB + BL) = \frac{2}{3}\left(c + \frac{1}{2}a\right) = \frac{2}{3}c + \frac{1}{3}a$$

$$v = \frac{1}{3}(AB + BA') = \frac{1}{3}(c - b) = \frac{1}{3}c - \frac{1}{3}b$$

$$u = MA + AB = \frac{1}{2}b + c$$

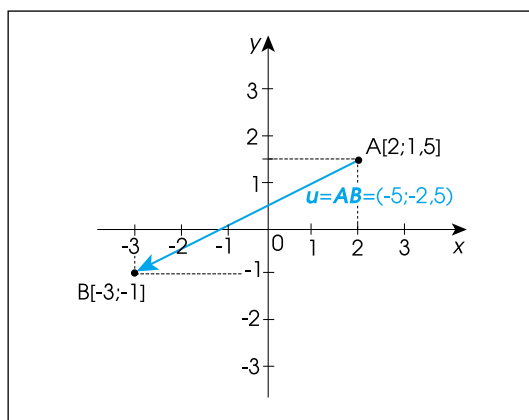
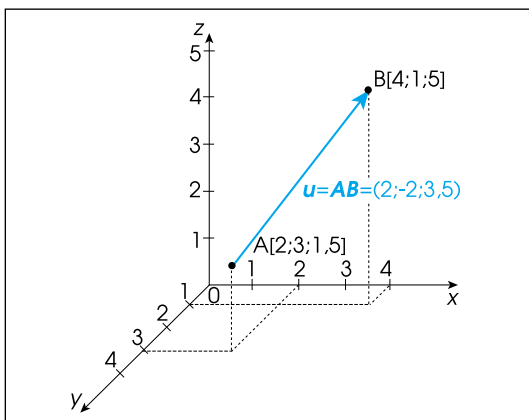


$$v = AB + BB' + \frac{1}{2}BC = -a + c + \frac{1}{2}b$$

$$u = C'C + CK + KO = -c - \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}a$$

Je-li $\mathbf{u} = \mathbf{AB}$ libovolný nenulový vektor s počátečním bodem A $[a_1; a_2; a_3]$ a koncovým bodem B $[b_1; b_2; b_3]$, pak **souřadnice vektoru $\mathbf{u}$** jsou rovny rozdílům souřadnic bodů B a A (v uvedeném pořadí) $u_1 = b_1 - a_1$, $u_2 = b_2 - a_2$, $u_3 = b_3 - a_3$, což zapisujeme $\mathbf{u} = (u_1; u_2; u_3)$. Je-li A = B, pak dostáváme nulový vektor $\mathbf{o} = (0; 0; 0)$.

- Pro vektor $\mathbf{u} = \mathbf{AB}$ používáme symbolickou rovnici $\mathbf{u} = \mathbf{B} - \mathbf{A}$.
- Pracujeme-li v rovině, vypustíme třetí souřadnice. Obdobně na přímce třetí i druhé souřadnice. (Tato úmluva platí i pro vztahy v dalším textu, pokud mají v rovině, popř. na přímce smysl.)
- Např.**



Je-li $\mathbf{u} = (u_1; u_2; u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1; v_2; v_3)$, pak platí:

Velikost vektoru:

Rovnost vektorů:

Součet vektorů:

Rozdíl vektorů:

Opačný vektor k $\mathbf{u}$:

k-násobek vektoru $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$:

Skalární součin vektorů:

Úhel dvou nenulových vektorů φ :

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} \Leftrightarrow (u_1 = v_1) \wedge (u_2 = v_2) \wedge (u_3 = v_3)$$

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{w}; \mathbf{w} = (u_1 + v_1; u_2 + v_2; u_3 + v_3)$$

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{w}; \mathbf{w} = (u_1 - v_1; u_2 - v_2; u_3 - v_3)$$

$$-\mathbf{u} = (-u_1; -u_2; -u_3)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{u} = (ku_1; ku_2; ku_3), \mathbf{k} \in \mathbb{R}$$

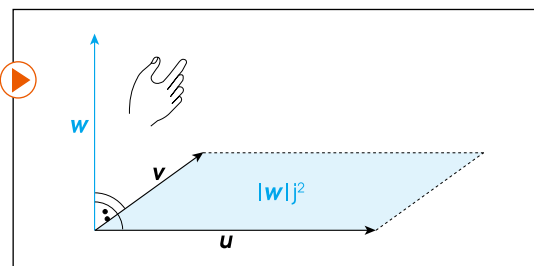
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 \text{ (reálné číslo)}$$

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|} \cdot \langle 0^\circ; 180^\circ \rangle$$

- Vztahy platí jak v prostoru, tak v rovině.
- Skalární součin dvou nenulových vektorů se užívá k určení **kolmých vektorů**. Ze vztahu pro úhel dvou vektorů pak vyplývá $\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$. (Odtud v rovině: $\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \Leftrightarrow \exists k \neq 0; \mathbf{u} = (u_1; u_2) \wedge \mathbf{v} = (-k \cdot u_2; k \cdot u_1)$.)
- V prostoru zavádíme také **vektorový součin $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$** , jehož výsledkem je vektor:
 $\mathbf{w} = (u_2v_3 - v_2u_3; u_3v_1 - v_3u_1; u_1v_2 - v_1u_2)$.
Velikost $|\mathbf{w}|$ = $|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \sin \varphi$ (odpovídá geometricky velikosti plochy rovnoběžníka, který je určen $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$).
Vektor $\mathbf{w}$ je kolmý k $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$ a jeho směr určuje pravidlo pravé ruky.
V praxi se používá k určení souřadnic vektorového součinu $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ schema:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2v_3 - v_2u_3; u_3v_1 - v_3u_1; u_1v_2 - v_1u_2)$$



Např.

Jsou dány vektory $\mathbf{u} = (16; 4; -7)$, $\mathbf{v} = (3; -9; -4)$. Pak:

- a) velikosti vektorů: $|\mathbf{u}| = \sqrt{16^2 + 4^2 + (-7)^2} = \sqrt{321}$; $|\mathbf{v}| = \sqrt{3^2 + (-9)^2 + (-4)^2} = \sqrt{106}$
 b) vektory si nejsou rovný: $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$, neboť $u_1 \neq v_1$ atd.
 c) součet vektorů $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$: $\mathbf{w} = (16 + 3; 4 + (-9); -7 + (-4)) \Rightarrow \mathbf{w} = (19; -5; -11)$
 d) rozdíl vektorů $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$: $\mathbf{w} = (16 - 3; 4 - (-9); -7 - (-4)) \Rightarrow \mathbf{w} = (13; 13; -3)$
 e) opačný vektor k $\mathbf{u}$: $-\mathbf{u} = (-16; -4; 7)$
 opačný vektor k $\mathbf{v}$: $-\mathbf{v} = (-3; 9; 4)$
 f) dvojnásobek vektoru $\mathbf{u}$: $\mathbf{w} = 2\mathbf{u}$. Pak $\mathbf{w} = (2 \cdot 16; 2 \cdot 4; 2 \cdot (-7)) \Rightarrow \mathbf{w} = (32; 8; -14)$
 g) skalární součin $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 16 \cdot 3 + 4 \cdot (-9) + (-7) \cdot (-4) = 40$

Např. Je dán pravidelný čtyřboký jehlan ABCDV, jehož výška je 8j, délka podstavné hrany $a = 6j$.

Zvolte vhodně soustavu souřadnic a určete:

- a) velikost boční hrany jehlanu
 b) velikost úhlu vektorů $\mathbf{BD}$ a $\mathbf{AV}$
 c) odchylku roviny podstavy a roviny boční stěny jehlanu

Řešení:

Zvolíme-li soustavu O_{xyz} podle obrázku, pak platí:

- a) pravidelný čtyřboký jehlan má všechny boční hrany stejně dlouhé. Velikost boční hrany AV je rovna velikosti vektoru $\mathbf{a} = \mathbf{AV}$ souřadnice vektoru $\mathbf{a}$ jsou:

$$\mathbf{AV} = \mathbf{V} - \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{a} = (3; 3; 8)$$

$$|\mathbf{a}| = |\mathbf{AV}| = \sqrt{3^2 + 3^2 + 8^2} = \sqrt{9 + 9 + 64} = \sqrt{82}$$

- b) $\mathbf{a} = \mathbf{AV} \Rightarrow \mathbf{a} = (3; 3; 8)$ $\mathbf{b} = \mathbf{BD} \Rightarrow \mathbf{b} = (-6; 6; 0)$

Velikost úhlu φ vektorů $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ určíme ze vztahu

$$\cos \varphi = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

$$\cos \varphi = \frac{3 \cdot (-6) + 3 \cdot 6 + 8 \cdot 0}{\sqrt{3^2 + 3^2 + 8^2} \cdot \sqrt{(-6)^2 + 6^2 + 0^2}} = 0 \Rightarrow \varphi = 90^\circ$$

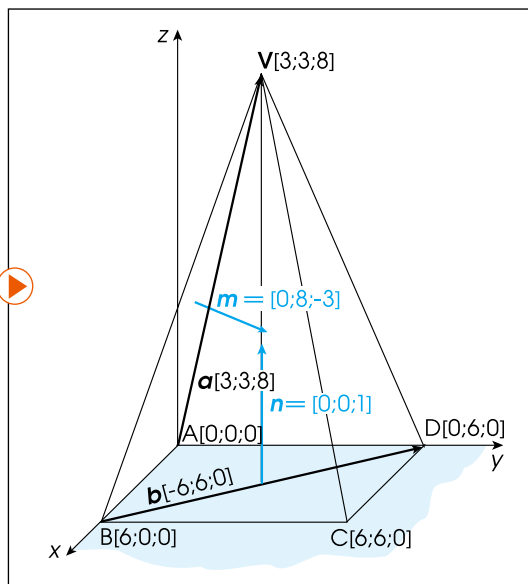
- c) Odchylku α roviny boční stěny určíme pomocí normálových vektorů $\mathbf{n}$ a $\mathbf{m}$: (tj. vektorů kolmých k daným rovinám). Rovina podstavy je souřadnicová rovina xy a její normálový vektor je $\mathbf{n} = (0; 0; 1)$. Normálový vektor $\mathbf{m}$ roviny boční stěny ABV určíme pomocí vektorového součinu vektorů $\mathbf{AV} = (3; 3; 8)$ a $\mathbf{AB} = (6; 0; 0)$.

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 8 \\ 6 & 0 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} \quad \mathbf{m} = (3 \cdot 0 - 0 \cdot 8; 8 \cdot 6 - 0 \cdot 3; 3 \cdot 0 - 6 \cdot 3) = (0; 48; -18)$$

Protože se jedná o určení úhlu vektorů, můžeme použít i vektor šestkrát kratší: $\mathbf{m} = (0; 8; -3)$. Pak platí:

$$\cos \alpha = \left| \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}}{|\mathbf{n}| \cdot |\mathbf{m}|} \right| \quad (\text{Absolutní hodnota zajistí, že odchylka rovin bude } \alpha = \langle 0^\circ; 90^\circ \rangle.)$$

$$\cos \alpha = \left| \frac{0 \cdot 0 + 0 \cdot 8 + 1 \cdot (-3)}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} \cdot \sqrt{0^2 + 8^2 + (-3)^2}} \right| \doteq 0,35112 \Rightarrow \alpha = 69^\circ 27'$$



7.2. LINEÁRNÍ ÚTVARY V ROVINĚ

■ Souřadnice bodů:

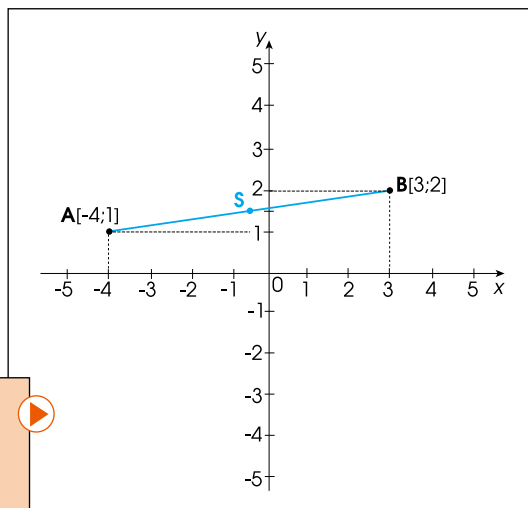
$A[a_1; a_2]$ nebo $X[x; y]$

■ Střed úsečky AB:

$$S = \frac{A+B}{2}, \text{ tedy } S\left[\frac{a_1+b_1}{2}; \frac{a_2+b_2}{2}\right]$$

■ Délka úsečky AB: (velikost vektoru AB)

$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$



Např.

a) $A[-4;1]$ $B[3;2]$

b) $S = \frac{A+B}{2} \Rightarrow S\left[\frac{-4+3}{2}; \frac{1+2}{2}\right] = \left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$

c) $|AB| = \sqrt{3 - (-4)^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{50}$

■ Parametrická rovnice přímky p:

Je-li přímka p určena bodem $A[a_1; a_2]$ a nenulovým směrovým vektorem $s = (s_1; s_2)$, pak je:

$$\text{parametrická rovnice přímky } \left. \begin{array}{l} p: x = a_1 + t \cdot s_1 \\ y = a_2 + t \cdot s_2 \end{array} \right\} t \in \mathbb{R} \text{ je parametr}$$

$$\text{symbolická rovnice p: } \mathbf{X} = \mathbf{A} + ts \wedge t \in \mathbb{R}$$

Vhodnou volbou parametru lze získat rovnici polopřímky, popř. úsečky.

■ Obecná rovnice přímky p:

Je-li přímka p určena bodem $A[a_1; a_2]$ a směrovým vektorem $s = (s_1; s_2)$, lze ji vyloučením parametru z parametrické rovnice vyjádřit ve tvaru $s_2x - s_1y - (s_2a_1 - s_1a_2) = 0$ a dostaneme:

obecnou rovnici přímky p: $ax + by + c = 0$, kde $\mathbf{n} = (a, b) \neq 0$ je normálový vektor kolmý k přímce p

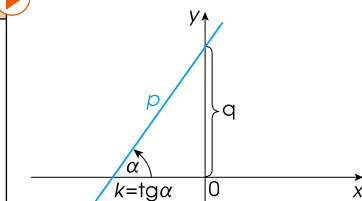
■ Směrnice tvar rovnice přímky p: (1)

Je-li v rovnici p: $ax + by + c = 0$, $b \neq 0$, pak ji lze upravit na tvar: $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$, což je:

směrnice tvar rovnice přímky (1) p: $y = kx + q$, kde $k, q \in \mathbb{R}$

Rovnice nezahrnuje přímky rovnoběžné s osou y ($b = 0$).

$k = \tan \alpha$ je tzv. směrnice přímky $\left(k = \frac{s_2}{s_1} = -\frac{a}{b}\right)$



■ Směrnice tvar rovnice přímky p: (2)

Je-li přímka p určena body $A[a_1; a_2]$, $B[b_1; b_2]$, lze určit rovnici přímky ve tvaru:

směrnice tvar rovnice přímky (2) $p: y - a_2 = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1} (x - a_1)$, kde $b_1 \neq a_1$

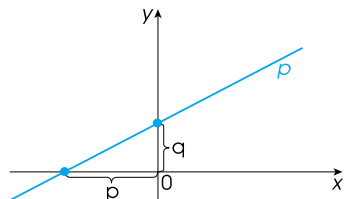
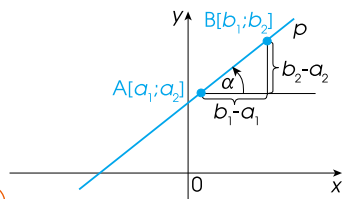
Číslo $k = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}$ je **směrnici** přímky p.

Tuto rovnici nelze použít pro přímky rovnoběžné s osou y.

■ Úsekový tvar rovnice přímky p:

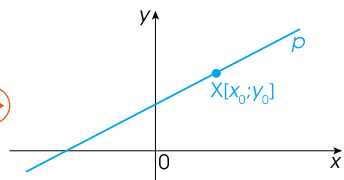
Známe-li úseky p, q, které vytíná přímka různoběžná se souřadnicovými osami na osách x a y, pak lze užít

úsekový tvar rovnice přímky $p: \frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1 \wedge p \neq 0, q \neq 0$



■ Vzájemná poloha bodu a přímky: (1)

Bod $X[x_0; y_0]$ leží na přímce p, jestliže jeho souřadnice vyhovují rovnici přímky, tedy $X \in p \Leftrightarrow ax_0 + by_0 + c = 0$ nebo $X \in p \Leftrightarrow y_0 = kx_0 + q$ atd.



■ Vzájemná poloha bodu a přímky: (2)

Vzdálenost bodu $X[x_0; y_0]$ od přímky p:

$ax + by + c = 0$ je dána vztahem $v(X, p) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Např. V rovině jsou dány body $A[0; 2]$, $B[1; 5]$, které leží na přímce p. Potom je:

a) směrový vektor přímky p:

$$\mathbf{s} = \mathbf{AB} = \mathbf{B} - \mathbf{A} = (1 - 0; 5 - 2) = (1; 3)$$

b) normálový vektor přímky p:

Protože $\mathbf{n} \perp \mathbf{s} \Leftrightarrow \mathbf{n} \cdot \mathbf{s} = 0$ lze získat souřadnice normálového vektoru tak, že zaměníme souřadnice vektoru směrového a u jedné z nich zaměníme znaménko na opačné: $\mathbf{s}(1; 3) \Rightarrow \mathbf{n} = (3; -1)$ nebo $\mathbf{n} = (-3; 1)$.

c) parametrická rovnice přímky p:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A} + t\mathbf{s} \wedge t \in \mathbb{R}$$

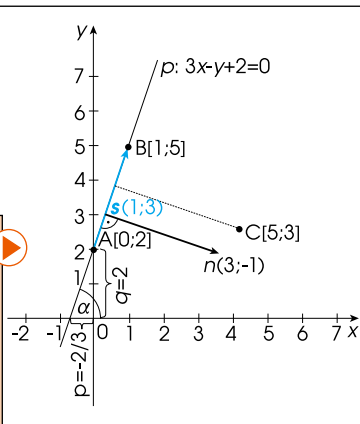
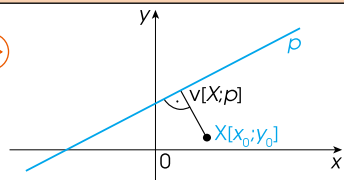
$$p: \begin{cases} x = 0 + 1 \cdot t \\ y = 2 + 3 \cdot t \end{cases} t \in \mathbb{R}$$

d) parametrická rovnice úsečky AB:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A} + t\mathbf{s} \wedge t \in \langle 0; 1 \rangle$$

$$AB: \begin{cases} x = t \\ y = 2 + 3t \end{cases} t \in \langle 0; 1 \rangle$$

Hodnota parametru t určuje polohu libovolného bodu X na přímce p vůči počátečnímu bodu A a směrovému vektoru s. Je-li např.
 $t = 0 \Rightarrow \mathbf{X} = \mathbf{A}$
 $t = 1/2 \Rightarrow \mathbf{X}$ je střed úsečky AB
 $t = 1 \Rightarrow \mathbf{X} = \mathbf{B}$ atd.



e) **parametrická rovnice polopřímky BA:** $AB: \begin{cases} x = t \\ y = 2 + 3t \end{cases} t \in (-\infty; 1]$

f) **obecná rovnice přímky p:**

① Obecná rovnice přímky určená vyloučením parametru z rovnice parametrické:

$$p: \begin{cases} x = t \\ y = 2 + 3t \end{cases} t \in \mathbb{R} \Rightarrow p: 3x - y + 2 = 0$$

② Určení obecné rovnice přímky pomocí $p: ax + by + c = 0$, pomocí normálového vektoru $n = (3; -1)$ viz b.

$p: 3x - y + c = 0$. Jelikož $A \in p$, musí souřadnice bodu A $[0; 2]$ rovnici přímky p vyhovovat:

$$3 \cdot 0 - 2 + c = 0 \Rightarrow c = +2. \text{ Tedy: } p: 3x - y + 2 = 0$$

③ Obecná rovnice přímky určená pomocí rovnice $y - a_2 = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1} (x - a_1)$.

$$p: y - 2 = \frac{5 - 2}{1 - 0} (x - 0)$$

$$y - 2 = 3x \Rightarrow 3x - y + 2 = 0 \quad (\text{Nelze použít pro přímky } p \parallel y.)$$

④ Obecnou rovnici přímky p lze získat dosazením souřadnic bodů do směrnice tvaru $p: y = kx + q$.

$$\begin{cases} A: 2 = 0 + q \\ B: 5 = k + q \end{cases} k = 3, q = 2 \Rightarrow p: y = 3x + 2 \Rightarrow 3x - y + 2 = 0$$

■ Poznámka: Obecnou rovnici přímky lze získat i dalšími postupy.

g) **Vzdálenost bodu C $[5; 3]$ od přímky p:** $v(p, C) = \frac{|3 \cdot 5 - 3 + 2|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{|14|}{\sqrt{10}} = \frac{7\sqrt{10}}{5}$

h) Bod $D[2; y]$ **bude ležet na přímce** p, bude-li jeho druhá souřadnice také rovnici přímky vyhovovat:

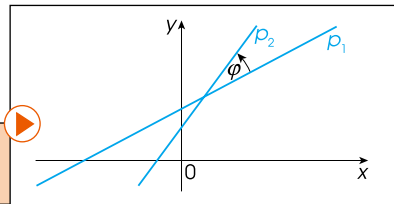
$$y = 2 + 3x \Rightarrow y = 2 + 3 \cdot 2 = 6 \Rightarrow D[2; 6]$$

■ **Odchylka φ dvou přímek p_1, p_2 : (1)**

Jsou-li přímky v obecném tvaru $p_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$

$p_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$, pak platí pro

$$\text{odchylku } \varphi \text{ přímek } p_1, p_2 \cos \varphi = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}, \varphi \in \langle 0^\circ; 90^\circ \rangle.$$



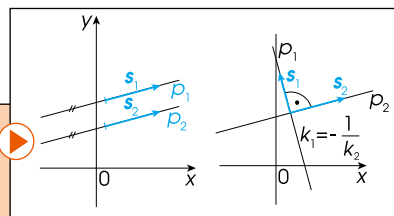
■ **Odchylka φ dvou přímek p_1, p_2 : (2)**

Jsou-li přímky ve směrnice tvaru a mají-li směrnice k_1, k_2 ,

pak platí pro

$$\text{odchylku } \varphi \text{ přímek } p_1, p_2 \tan \varphi = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2} \right| \text{ pokud } k_1, k_2 \text{ existují}$$

a $k_1k_2 \neq -1$ je $\varphi \in \langle 0^\circ; 90^\circ \rangle$. Pro $k_1 \cdot k_2 = -1$ je $\varphi = 90^\circ$.



■ Přímky jsou rovnoběžné právě tehdy, když mají rovnoběžné *směrové vektory* (resp. *normálové vektory*) a tedy platí: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$. Lze-li přímky vyjádřit ve směrnice tvaru, pak musí být jejich *směrnice stejné* $k_1 = k_2$.

■ Přímky jsou *kolmé* právě tehdy, když mají navzájem kolmé *směrové vektory* (resp. *normálové vektory*) a tedy platí $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$. Lze-li přímky vyjádřit ve směrnice tvaru, pak pro jejich směrnice platí $k_1 = -\frac{1}{k_2}$.

Např. a) Přímka $p_1: 2x - 3y + 1 = 0$ je rovnoběžná s přímkou $p_2: 4x - 6y + 3 = 0$, neboť mají rovnoběžné normálové vektory $n_1 = (2; -3)$ a $n_2 = (4; -6)$, (resp. stejnou směrnici $k_1 = \frac{2}{3}$ a $k_2 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$).

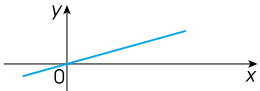
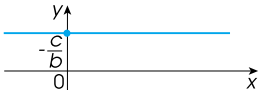
b) Přímka $p_1: 2x - 3y + 1 = 0$ je kolmá k přímce $p_2: 6x + 4y + 3 = 0$, neboť mají kolmé normálové vektory $n_1 = (2; -3)$ a $n_2 = (6; 4)$ a jejich skalární součin je roven nule $2 \cdot 6 + (-3) \cdot 4 = 0$ (resp. směrnice přímky p_1 je $k_1 = \frac{2}{3}$, směrnice druhé přímky $k_2 = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$ a tedy $k_1 = -\frac{1}{k_2}$).

Např. Bodem $C[3; 1]$ vedte přímku q rovnoběžnou s přímkou $p: 2x + 4y - 5 = 0$.

Řešení: Existuje nekonečně mnoho přímek, které jsou rovnoběžné s přímkou p a navzájem se liší pouze posunutím. Všechny tyto přímky lze popsat rovnicí $q: 2x + 4y + d = 0 \wedge d \in \mathbb{R}$. Hledanou přímku q , která prochází bodem C určíme na základě toho, že souřadnice bodu C musí rovnici této přímky vyhovovat. Odtud: $2 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + d = 0 \Rightarrow d = -10$.

Rovnice přímky q je $2x + 4y - 10 = 0$.

Např. Tabulka udává tvary obecné rovnice přímky ve speciálních polohách vůči soustavě souřadnic O_{xy} .

Poloha přímky	Podmínky	Obecná rovnice	Obrázek
Přímka prochází počátkem soustavy souřadnic O	$c = 0$	$ax + by = 0$	
Rovnoběžka s osou x (kolmice k ose y)	$a = 0, b \neq 0$	$by + c = 0$	
Rovnoběžka s osou y (kolmice k ose x)	$b = 0, a \neq 0$	$ax + c = 0$	
Souřadnicová osa x	$a = 0 \wedge c = 0$	$y = 0$	
Souřadnicová osa y	$b = 0 \wedge c = 0$	$x = 0$	

7.3. LINEÁRNÍ ÚTVARY V PROSTORU

■ Souřadnice bodů:

▶ $A[a_1; a_2; a_3], B[b_1; b_2; b_3]$ nebo $X[x, y, z]$

■ Střed úsečky AB :

▶ $S = \frac{A+B}{2}$, tedy $S \left[\frac{a_1+b_1}{2}; \frac{a_2+b_2}{2}; \frac{a_3+b_3}{2} \right]$

■ Délka úsečky AB :

▶ $|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$

Např. Je-li $A[2; -1; 3]$, $B[3; 2; 5]$, pak:

a) střed úsečky AB: $S = \frac{A+B}{2}, \Rightarrow S\left[\frac{2+3}{2}; \frac{-1+2}{2}; \frac{3+5}{2}\right] \Rightarrow S\left[\frac{5}{2}; \frac{1}{2}; 4\right]$

b) délka úsečky AB: $|AB| = \sqrt{(3-2)^2 + (2-(-1))^2 + (5-3)^2} = \sqrt{14}$

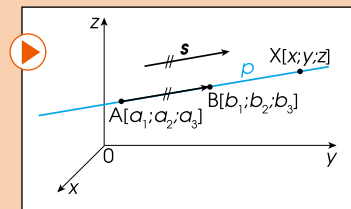
Parametrická rovnice přímky p:

Je-li přímka p určena bodem $A[a_1; a_2; a_3]$ a nenulovým směrovým vektorem $s = (s_1; s_2; s_3)$, pak:

parametrická rovnice přímky

$$\left. \begin{aligned} p: x &= a_1 + t \cdot s_1 \\ y &= a_2 + t \cdot s_2 \\ z &= a_3 + t \cdot s_3 \end{aligned} \right\} \quad \wedge t \in \mathbb{R} \text{ je parametr.}$$

Symbolická rovnice p: $X = A + t \cdot s \wedge t \in \mathbb{R}$.

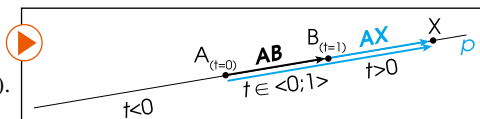


Ze symbolické rovnice vyplývá, že vyjadřuje vlastně polohu libovolného bodu $X \in p$ vzhledem k bodům A, B. Vhodnou volbou parametru t pak lze získat buď *všechny body dané přímky* ($t \in \mathbb{R}$), nebo jen body patřící části této přímky, např. pro $t \in \langle 0; 1 \rangle$ získáme *úsečku* AB, pro $t \in \langle 0; \infty \rangle$ *polopřímku* AB.

Např. Jsou dány body $A[3; 2; 1]$, $B[4; 6; -8]$. Určete:

- parametrickou rovnici přímky $p = AB$
- parametrickou rovnici úsečky AB a určete hodnotu parametru pro střed úsečky
- parametrickou rovnici polopřímky BA

Řešení: Řešení vychází z toho, že pro libovolný bod $X \in p$ musí platit $AX = t \cdot AB$ (vektory jsou lineárně závislé).



Odtud plyne:

- pro libovolný bod přímky p platí $AX = t \cdot AB \wedge t \in \mathbb{R} \Rightarrow X - A = t \cdot (B - A) \Rightarrow X = A + t(B - A) \wedge t \in \mathbb{R}$
dosazením konkrétních hodnot dostaneme *rovnici přímky p*:

p: $\{x = 3 + t; y = 2 + 4t; z = 1 - 9t \wedge t \in \mathbb{R}\}$

- volíme-li $t = 0$, pak z rovnice přímky získáme bod A, je-li $t = 1$, získáme bod B, volbou $t \in \langle 0; 1 \rangle$ získáme *všechny body úsečky* AB:

$\rightarrow AB: \{x = 3 + t; y = 2 + 4t; z = 1 - 9t \wedge t \in \langle 0; 1 \rangle\}$

Střed S úsečky AB dostaneme dosazením $t = 1/2$

S: $\{x = 3 + t; y = 2 + 4t; z = 1 - 9t \wedge t = 1/2\} \Rightarrow S[3,5; 4; -3,5]$

- parametrická rovnice polopřímky AB:

$\rightarrow AB: \{x = 3 + t; y = 2 + 4t; z = 1 - 9t \wedge t \in \langle 0; \infty \rangle\}$

Kanonická rovnice přímky p:

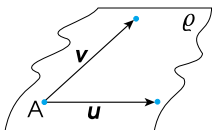
Není-li $s = (0;0;0)$, lze psát *rovnici přímky p v kanonickém tvaru* p: $\frac{x - a_1}{s_1} = \frac{y - a_2}{s_2} = \frac{z - a_3}{s_3}$

■ **Poznámka:** Rovnici přímky p lze v prostoru určit také jako průsečnici dvou rovin.

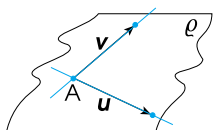
■ Parametrická rovnice roviny ϱ :

Rovina může být v prostoru určena:

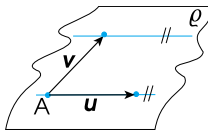
a) třemi různými body,
které neleží v přímce



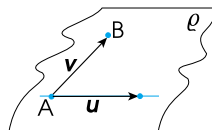
b) dvěma různoběžkami



c) dvěma různými
rovnoběžkami



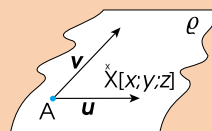
d) přímkou a bodem B,
který na ní neleží



Všechny tyto případy lze převést na určení roviny bodem $A[a_1; a_2; a_3]$ a dvěma nenulovými různoběžnými vektory $\mathbf{u} = (u_1; u_2; u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1; v_2; v_3)$. Tak dostaneme **parametrickou rovnici roviny**.

$$\varrho: \begin{cases} x = a_1 + t \cdot u_1 + s \cdot v_1 \\ y = a_2 + t \cdot u_2 + s \cdot v_2 \\ z = a_3 + t \cdot u_3 + s \cdot v_3 \end{cases} \quad t, s \in \mathbb{R} \text{ jsou parametry}$$

Symbolická rovnice ϱ : $X = A + t \cdot \mathbf{u} + s \cdot \mathbf{v} \wedge t, s \in \mathbb{R}$.



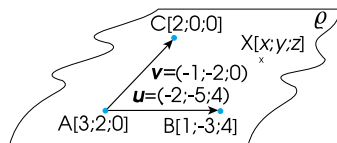
■ *Poznámka:* Vhodnou volbou parametrů lze získat rovnici poloroviny, pásu atd.

Např. Určete parametrickou rovnici roviny $\varrho = ABC$, je-li $A[3; 2; 0]$, $B[1; -3; 4]$, $C[2; 0; 0]$.

Řešení: Platí: $A[3; 2; 0]$, $\mathbf{u} = (-2; -5; 4)$, $\mathbf{v} = (-1; -2; 0)$.

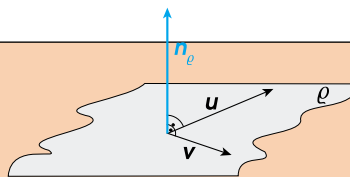
Rovnice roviny ϱ má parametrický tvar:

$$\varrho: \{x = 3 - 2t - s; y = 2 - 5t - 2s; z = 0 + 4t + 0s \wedge t, s \in \mathbb{R}\}$$



■ Obecná rovnice roviny ϱ :

Vyloučením parametrů t, s z parametrické rovnice roviny získáme **obecnou rovnici roviny ϱ : $ax + by + cz + d = 0$** , kde alespoň jeden z koeficientů a, b, c je různý od nuly a vektor $\mathbf{n} = (a, b, c)$ je **normálový vektor** roviny.



Např. Určete rovnici roviny ϱ tak, aby měla normálový vektor $\mathbf{n}_\varrho = (2; -1; 3)$ a aby v ní ležel bod $A[4; 5; 0]$.

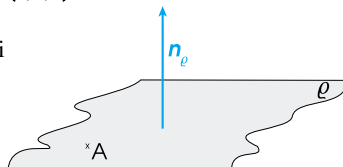
Řešení: Obecná rovnice roviny ϱ má tvar $ax + by + cz + d = 0$, kde $\mathbf{n}_\varrho = (a, b, c)$

$$\varrho: 2x - y + 3z + d = 0$$

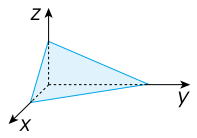
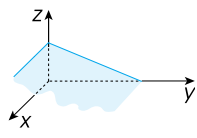
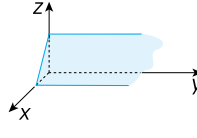
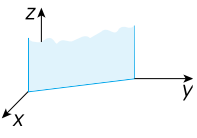
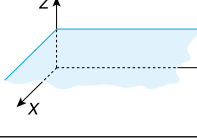
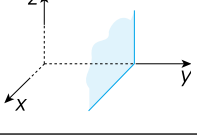
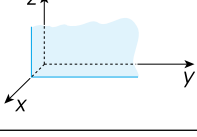
Jelikož bod A leží v rovině ϱ , musí jeho souřadnice obecné rovnici roviny ϱ vyhovovat a platí:

$$2 \cdot 4 - 1 \cdot 5 + 3 \cdot 0 + d = 0 \Rightarrow d = -3$$

Obecná rovnice roviny ϱ má tvar: $\varrho: 2x - y + 3z - 3 = 0$.



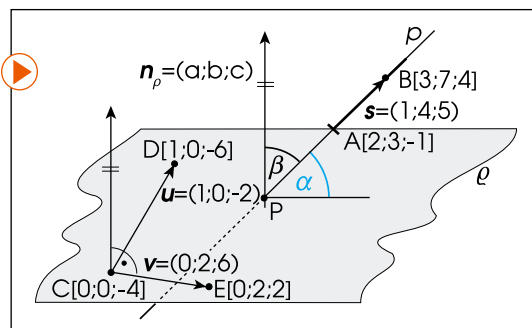
Např. Tabulka udávající tvary obecné rovnice roviny ve speciálních polohách vůči soustavě souřadnic O_{xy} :

Poloha roviny	Podmínky	Obecná rovnice	Obrázek
Rovina různoběžná s rovinami xy , xz , yz a neprocházející počátkem	$a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$	$ax + by + cz + d = 0$	
Rovina rovnoběžná s osou x	$a = 0, b \neq 0, c \neq 0$	$by + cz + d = 0$	
Rovina rovnoběžná s osou y	$b = 0, a \neq 0, c \neq 0$	$ax + cz + d = 0$	
Rovina rovnoběžná s osou z	$c = 0, a \neq 0, b \neq 0$	$ax + by + d = 0$	
Rovina rovnoběžná s rovinou xy	$a = 0, b = 0, c \neq 0$	$cz + d = 0$	
Rovina rovnoběžná s rovinou xz	$a = 0, b \neq 0, c = 0$	$by + d = 0$	
Rovina rovnoběžná s rovinou yz	$a \neq 0, b = 0, c = 0$	$ax + d = 0$	

- Rovina procházející počátkem má $d = 0$; ρ : $ax + by + cz = 0$ (Obdobně v dalších případech: $by + cz = 0$, $ax + cz = 0$, $ax + by = 0$, $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$.)

Např. Určete vzájemnou polohu přímky p určené body $A[2; 3; -1]$, $B[3; 7; 4]$ a roviny $\rho = CDE$, kde $C[0; 0; -4]$, $D[1; 0; -6]$, $E[0; 2; 2]$.

Řešení: 1) Načrtneme situaci:



2) Určíme parametrickou rovnici přímky p pomocí symbolické rovnice $\mathbf{p}: \mathbf{X} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} - \mathbf{A})t$.

Tedy $\mathbf{p}: \{x = 2 + t; y = 3 + 4t; z = -1 + 5t \mid t \in \mathbb{R}\}$.

3) Rovina $\rho: ax + by + cz + d = 0$ má normálový vektor $\mathbf{n}_\rho = (a, b, c)$, který je dán vektorovým součinem $\mathbf{n}_\rho = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Souřadnice normálového vektoru $\mathbf{n}_\rho$ určíme pomocí schématu:

$$\left. \begin{aligned} n_1 &= a = 0 \cdot 6 - (-2) \cdot 2 = 4 \\ n_2 &= b = -2 \cdot 0 - 1 \cdot 6 = -6 \\ n_3 &= c = 1 \cdot 2 - 0 \cdot 0 = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbf{n}_\rho = (4; -6; 2)$$

Jelikož potřebujeme znát pouze směr normálového vektoru, můžeme pracovat s vektorem polovičním $\mathbf{n}_\rho = (2; -3; 1)$. Rovnice roviny je $\rho: 2x - 3y + z + d = 0$. Bod C v rovině leží, tedy jeho souřadnice musí rovnici roviny vyhovovat. Odtud plyne $2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 + 1 \cdot (-4) + d = 0 \Rightarrow d = 4$. Rovnice roviny ρ je: $\rho: 2x - 3y + z + 4 = 0$.

4) Jelikož $\mathbf{n}_\rho \nparallel \mathbf{s}$ protíná přímka rovinu v bodě P , jehož souřadnice musí vyhovovat rovnici roviny ρ i přímky p .

Dosazením za x, y, z z rovnice přímky do rovnice roviny dostaneme:

$2(2 + t) - 3(3 + 4t) + (-1 + 5t) + 4 = 0 \Rightarrow t = -2/5$. Průsečík P získáme dosazením $t = -2/5$ do rovnice přímky p : $P[8/5; 7/5; -3]$.

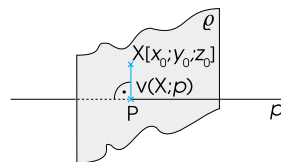
5) Odchylku α přímky p od roviny ρ určíme pomocí směrového vektoru $\mathbf{s} = (1; 4; 5)$ a normálového vektoru roviny $\mathbf{n}_\rho = (2; -3; 1)$ (viz náčrt).

$$\cos \beta = \frac{|1 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) + 5 \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + 4^2 + 5^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2}} = \sin(90^\circ - \beta) = \sin \alpha \Rightarrow \alpha \doteq 11^\circ 54'$$

Závěr: Přímka protíná rovinu v bodě $P[8/5; 7/5; -3]$ a svírá s rovinou úhel $11^\circ 54'$.

■ Vzdálenost bodu $X[x_0; y_0; z_0]$ od přímky p

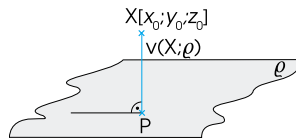
v prostoru určíme tak, že bodem X proložíme rovinu ρ kolmou k přímce p , určíme průsečík roviny ρ s přímkou p , tj. $P = \rho \cap p$ a pak určíme vzdálenost bodu P od přímky p jako délku úsečky XP .



■ Vzdálenost bodu $X[x_0; y_0; z_0]$ od roviny ρ :

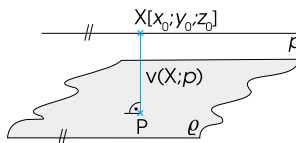
Je-li $\rho: ax + by + cz + d = 0$, pak vzdálenost bodu X od roviny ρ

$$v(X, \rho) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$



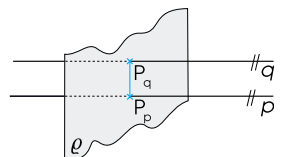
■ Vzdálenost přímky $p \parallel \rho$ od roviny ρ

určíme jako vzdálenost jejího libovolného bodu (který si na přímce p zvolíme) od roviny ρ . Analogicky se určí vzdálenost dvou rovnoběžných rovin.



■ Vzdálenost dvou rovnoběžných přímek p, q v prostoru

určíme tak, že vedeme libovolnou kolmou rovinu k oběma rovnoběžkám, určíme průsečíky P_p, P_q s těmito přímkami p a q a pak vzdálenost těchto rovnoběžek $p \parallel q$ je vzdálenost průsečíků P_p a P_q .

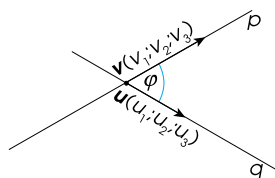


■ Odchylka dvou různoběžek p, q :

Odchylku dvou přímek se směřovými vektory u, v určíme pomocí

$$\text{skalárního součinu: } \cos \varphi = \frac{|u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}},$$

kde $\varphi \in \langle 0^\circ; 90^\circ \rangle$ (přímky jsou kolmé, je-li $u \cdot v = 0$).

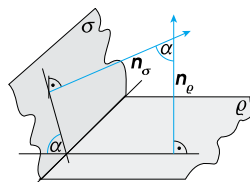


■ Odchylka α dvou různoběžných rovin ρ, σ :

Pomocí normálových vektorů rovin n_ρ, n_σ lze určit **odchylku rovin ρ a σ** ,

$$\text{pro kterou platí } \cos \alpha = \frac{|n_\rho \cdot n_\sigma|}{|n_\rho| \cdot |n_\sigma|} = \frac{|a_\rho a_\sigma + b_\rho b_\sigma + c_\rho c_\sigma|}{\sqrt{a_\rho^2 + b_\rho^2 + c_\rho^2} \cdot \sqrt{a_\sigma^2 + b_\sigma^2 + c_\sigma^2}}.$$

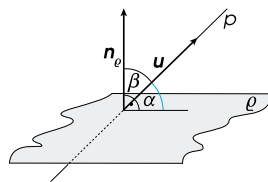
Je-li $n_\rho \cdot n_\sigma = 0$, jsou roviny kolmé.



■ Odchylka α přímky $p(A; u)$ od roviny ρ :

Je-li směřový vektor přímky u a normálový vektor roviny n_ρ ,

$$\text{pak odchylka } \alpha \text{ přímky od roviny je } \alpha = 90^\circ - \beta, \text{ kde } \cos \beta = \frac{|n_\rho \cdot u|}{|n_\rho| \cdot |u|}.$$



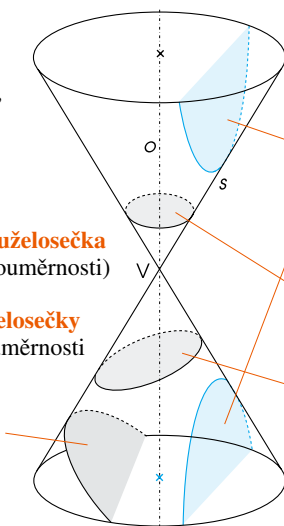
7.4. KUŽELOSEČKY

Kuželosečka je množina bodů v rovině, kterou lze získat jako průnik rotační kuželové plochy s a roviny ρ , která neprochází jejím vrcholem V .

- Podle vzájemné polohy roviny ρ a plochy s vzniknou:
 - nestředová kuželosečka** (nemá střed souměrnosti)
 - středové kuželosečky** mají střed souměrnosti

Nestředová kuželosečka

parabola – rovina ρ není kolmá k ose o a rovina $\sigma \parallel \rho$, která prochází bodem V , je tečnou rovinou plochy s



Středové kuželosečky

hyperbola – není-li rovina ρ kolmá k ose o a rovina $\sigma \parallel \rho$, která prochází bodem V , má s plochou s společné dvě přímky

kružnice – je-li rovina ρ kolmá k ose plochy o , protínají se v jednom bodě

elipsa – jestliže rovina ρ není kolmá k ose plochy o a rovina $\sigma \parallel \rho$, která prochází bodem V , nemá s plochou s žádný další společný bod

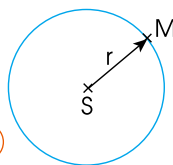
poznámka

- Často se považuje za kuželosečku i průnik plochy s s rovinou ρ , která prochází bodem V . Pak se jedná o *degenerovanou kuželosečku*, která se redukuje na bod V , resp. na jednu nebo dvě přímky.
- S kuželosečkami se setkáváme např. v astronomii, mechanice, optice, deskriptivní, projektivní a analytické geometrii.
- Při vhodné volbě soustavy souřadnic v rovině můžeme kuželosečku v analytické geometrii vyjádřit kvadratickou rovnicí.





Kružnice je množina všech bodů M v rovině, které mají od středu S konstantní vzdálenost $r > 0$.



S ... střed kružnice
 r ... poloměr kružnice
 M ... libovolný bod kružnice

KRUŽNICE A KRUH

- Vhodnou volbou soustavy souřadnic získáme středovou rovnici kružnice, popř. obecnou rovnici kružnice se středem S a poloměrem r i rovnice dalších geometrických útvarů v analytické geometrii.

Geometrický útvar	Pro libovolný bod $M[x; y]$ útvaru platí	Název geometrického útvaru a jeho analytické vyjádření v O_{xy}
	$ SM ^2 = r^2$	Kružnice $k(S; r)$ se středem $S[m; n]$ a poloměrem $r > 0$ Středová rovnice $(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$ resp. obecná rovnice $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \wedge A^2 + B^2 - 4AC > 0$
	$ SM < r^2$	Vnitřní oblast kružnice $k(S; r)$ Středová rovnice $(x-m)^2 + (y-n)^2 < r^2$ resp. obecná rovnice $x^2 + y^2 + Ax + By + C < 0 \wedge A^2 + B^2 - 4AC > 0$
	$ SM ^2 \leq r^2$	Kruh $K(S; r)$ Středová rovnice $(x-m)^2 + (y-n)^2 \leq r^2$ resp. obecná rovnice $x^2 + y^2 + Ax + By + C \leq 0 \wedge A^2 + B^2 - 4AC > 0$
	$ SM ^2 > r^2$	Vnější oblast kružnice $k(S; r)$ Středová rovnice $(x-m)^2 + (y-n)^2 > r^2$ resp. obecná rovnice $x^2 + y^2 + Ax + By + C > 0 \wedge A^2 + B^2 - 4AC > 0$

- Je-li střed S v počátku soustavy souřadnic, tedy $S[0; 0]$, $r > 0$, pak je:

- středová rovnice kružnice $x^2 + y^2 = r^2$
- středová rovnice kruhu $x^2 + y^2 \leq r^2$ atd.

Např. Rovnice $x^2 + y^2 = 25$ popisuje kružnici se středem $S[0; 0]$ a poloměrem $r = 5$.

- Kružnici lze v soustavě O_{xy} vyjádřit pomocí poloměru r a směrového úhlu φ přímky SM **parametricky**.

Např. Je-li $S[0; 0]$, $r > 0$, pak parametrické vyjádření kružnice je
$$\begin{cases} x = r \cdot \cos \varphi \\ y = r \cdot \sin \varphi \end{cases} \quad 0^\circ \leq \varphi < 360^\circ$$

- Užití analytického způsobu vyjádření kružnice ukazují následující příklady.

Např. Určete obecnou rovnici kružnice, která má průměr $d = |AB|$, kde $A[1; 1]$, $B[7; 9]$.
Zjistěte, kde leží body $C[4; 0]$, $D[1; 2]$, $E[-1; 6]$.

Řešení: Protože $A \neq B$, daná kružnice existuje.

Její střed S je středem úsečky AB : $S = \frac{A+B}{2}$, tedy $S[4; 5]$.

Poloměr r je roven délce úsečky SM, tedy:

$$r = |SM| = \sqrt{(4-1)^2 + (5-1)^2} = 5$$

Rovnice kružnice ve středovém tvaru:

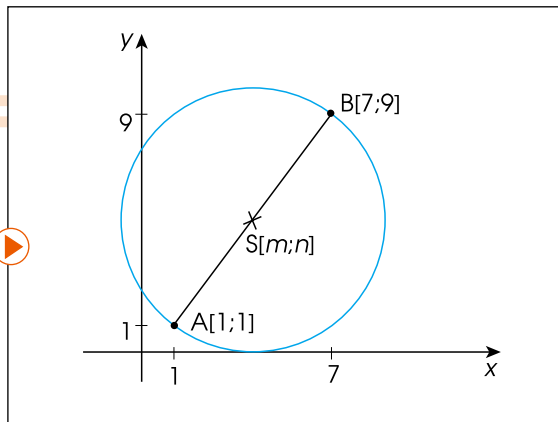
$$(x-4)^2 + (y-5)^2 = 25$$

Provedeme umocnění dvojčlenů a dostaneme:

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 - 10y + 25 = 25$$

Odtud rovnice kružnice v obecném tvaru:

$$x^2 + y^2 - 8x - 10y + 16 = 0$$



Polohu bodu C, D, E vyšetříme porovnáním levé strany L rovnice kružnice ve středovém tvaru s pravou stranou P:

$$C[4; 0]: (4-4)^2 + (0-5)^2 = 0^2 + 5^2 = 25 \Rightarrow$$

$L = P \Rightarrow C$ leží na kružnici k

$$D[1; 2]: (1-4)^2 + (2-5)^2 = (-3)^2 + (-3)^2 = 18 \Rightarrow$$

$L < P \Rightarrow D$ leží uvnitř kružnice k

$$E[-1; 6]: (-1-4)^2 + (6-5)^2 = (-5)^2 + 1^2 = 26 \Rightarrow$$

$L > P \Rightarrow E$ leží vně kružnice k

Např. Určete obecnou rovnici kružnice k , která prochází body $R[6; 9]$, $P[7; 8]$, $T[0; 1]$.

Řešení: Protože platí $RP \neq k \cdot RT$, neleží body v jedné přímce, a jelikož jsou od sebe různé, určují právě jednu kružnici k .

1. způsob: (Dosadíme souřadnice bodů R, S, T do rovnice kružnice ve středovém tvaru a určíme m, n, r):

$$\left. \begin{array}{l} (1) R[6; 9]: (6-m)^2 + (9-n)^2 = r^2 \\ (2) S[7; 8]: (7-m)^2 + (8-n)^2 = r^2 \\ (3) T[0; 1]: (0-m)^2 + (1-n)^2 = r^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 117 - 12m - 18n + m^2 + n^2 = r^2 \\ 113 - 14m - 16n + m^2 + n^2 = r^2 \\ 1 - 2n + m^2 + n^2 = r^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Odečtením třetí rovnice} \\ \text{od první a pak od druhé} \\ \text{dostaneme:} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} 116 - 12m - 16n = 0 \\ 112 - 14m - 14n = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 29 - 3m - 4n = 0 \\ -32 + 4m + 4n = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

Sečtením dostaneme $m = 3$,
zpětným dosazením $n = 5$, $r = 5$

Rovnice kružnice ve středovém tvaru je $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 25$.

(Úpravou dospějeme k výsledku $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 9 = 0$; (střed $S[3; 5]$ poloměr $r = 5$).

2. způsob: (Dosadíme souřadnice bodů R, P, T přímo do obecné rovnice kružnice a řešením soustavy rovnic určíme A, B, C):

$$\left. \begin{array}{l} R[6; 9]: 36 + 81 + 6A + 9B + C = 0 \\ P[7; 8]: 49 + 64 + 7A + 8B + C = 0 \\ T[0; 1]: 1 + 1B + C = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow A = -6; \quad B = -10; \quad C = 9$$

Obecná rovnice kružnice je $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 9 = 0$.

3. způsob: Kružnici lze určit také jako kružnici opsanou $\triangle RPT$ (Střed S je průsečíkem os stran, poloměr vypočteme jako vzdálenost středu S od libovolného vrcholu $\triangle RPT$).

Obecná rovnice kružnice je $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 9 = 0$.

Např. Ověřte, zda daná rovnice je obecnou rovnicí kružnice, pak určete střed a poloměr této kružnice:

a) $x^2 + y^2 - 8x + 6y - 24 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 25 = 0$

Řešení: a) Rovnici upravíme na tvar $(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$ takto:

$$(x^2 - 8x) + (y^2 + 6y) = 24 \Rightarrow (x^2 - 8x + 16) + (y^2 + 6y + 9) = 24 + 16 + 9 \Rightarrow (x-4)^2 + (y+3)^2 = 49 \Rightarrow$$

$$m = 4, \quad n = -3, \quad r^2 = 49 \Rightarrow r = 7$$

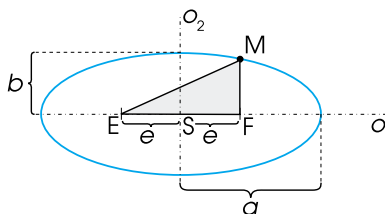
Jedná se o obecnou rovnici kružnice, která má střed $S[4; -3]$ a $r = 7$.

b) Analogickou úpravou dostáváme: $(x^2 - 8x + 16) + (y^2 + 6y + 9) = -25 + 16 + 9 \Rightarrow (x+4)^2 + (y+3)^2 = 0$
 Nejedná se o rovnici kružnice ($r = 0$).

ELIPSA

zapamatuj si

Elipsa je množina všech bodů M v rovině, které mají od dvou různých bodů E, F (ohnisek) z této roviny stálý součet vzdáleností, který je větší než vzdálenost těchto ohnisek: $|EM| + |FM| = 2a$.



S ... střed elipsy
 a ... hlavní poloosa elipsy
 b ... vedlejší poloosa elipsy
 o₁ ... hlavní osa elipsy
 o₂ ... vedlejší osa elipsy
 E, F ... ohniska elipsy
 M ... libovolný bod elipsy
 e ... výstřednost (excentricita) elipsy
 $e^2 = a^2 - b^2$



- Vhodnou volbou soustavy souřadnic získáme středovou rovnici elipsy, popř. obecnou rovnici elipsy se středem S a poloosami a, b:

Poloha elipsy v Oxy	Rovnice elipsy
	Středová rovnice $\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1 \quad \wedge \quad a > b$ S[0;0]: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \wedge \quad a > b$ Obecná rovnice $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0, A > 0, B > 0, A \neq B$
	Středová rovnice $\frac{(x-m)^2}{b^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1 \quad \wedge \quad a > b$ S[0;0]: $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad \wedge \quad a > b$ Obecná rovnice $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0, A > 0, B > 0, A \neq B$

- Je-li $S[0; 0]$, nazýváme **středovou rovnici** také **osovou rovnici elipsy**: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ resp. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
- Elipsu se středem $S[0; 0]$ lze určit parametricky: $\begin{cases} x = a \cdot \cos \varphi \\ y = b \cdot \sin \varphi \end{cases} \quad 0^\circ \leq \varphi < 360^\circ$
- Kružnici lze považovat za „speciální případ“ elipsy, kdy $a = b = r$.
- Bod $L[x; y]$ je **vnitřním bodem elipsy**, je-li $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E < 0$, kde $A > 0, B > 0, A \neq B$.
vnějším bodem elipsy, je-li $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E > 0$, kde $A > 0, B > 0, A \neq B$.

Např. Určete osovou i obecnou rovnici elipsy, je-li $a = 10, e = 8, o_1 \parallel x$.

Řešení: $a = 10, e = 8, S[0; 0], e^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow b^2 = 36$

Osová rovnice elipsy je: $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$. Úpravou dostaneme obecnou rovnici: $36x^2 + 100y^2 - 3600 = 0$.

Např. Určete délky poloos, ohniska a střed elipsy o rovnici: $36x^2 + 25y^2 = 900$.

Řešení: Rovnici vydělíme 900 a převedeme ji na tvar: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{36} = 1$, což je osová rovnice elipsy se středem **S[0; 0]**, hlavní osou y a vedlejší osou x ; **$a = 6, b = 5, e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{36 - 25} = \sqrt{11}$** , ohniska **$E[0; \sqrt{11}], F[0; -\sqrt{11}]$** .

Např. Zjistěte, zda rovnice $9x^2 + 4y^2 - 36x + 72y + 324 = 0$ je rovnicí elipsy.

Řešení: Danou rovnici postupně upravujeme takto:

$$9x^2 - 36x + 4y^2 + 72y = -324 \Rightarrow 9(x^2 - 4x) + 4(y^2 + 18y) = -324 \Rightarrow 9(x^2 - 4x + 4) + 4(y^2 + 18y + 81) = -324 + 9 \cdot 4 + 4 \cdot 81 \Rightarrow 9(x-2)^2 + 4(y+9)^2 = 36 \Rightarrow \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+9)^2}{9} = 1$$

$$a^2 = 9 \Rightarrow a = 3 \quad b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$$

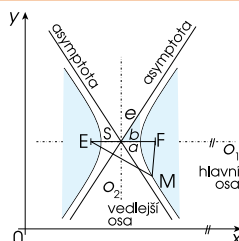
Jedná se o rovnici elipsy se středem **S[2; -9]**, **$a = 3, b = 2, o_1, y$** .

HYPERBOLA



zapamatuj si

Hyperbola je množina všech bodů M v rovině, pro které je absolutní hodnota rozdílu jejich vzdáleností od dvou různých bodů E, F této roviny rovna kladné konstantě ($2a < |EF|$)
 $|ME| - |MF| = 2a$.



S střed hyperboly
 a hlavní poloosa hyperboly
 b vedlejší poloosa hyperboly
 E, F . . . ohniska
 M libovolný bod hyperboly
 e výstřednost (excentricita) hyperboly
 $e^2 = a^2 + b^2$

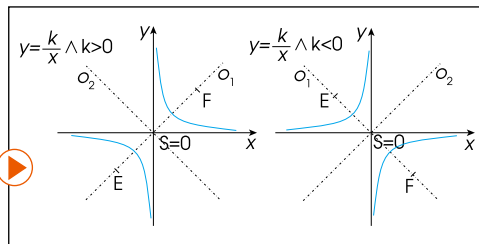
■ Vhodnou volbou soustavy souřadnic získáme rovnice hyperboly:

Poloha hyperboly v O_{xy}	Rovnice hyperboly
	Středová rovnice $\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$ S[0;0]: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ Obecná rovnice $Ax^2 - By^2 + Cx + Dy + E = 0, (A > 0, B > 0)$
	Středová rovnice $\frac{(x-m)^2}{b^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1$ S[0;0]: $-\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ Obecná rovnice $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0, (A > 0, B > 0)$

- Je-li $S[0; 0]$, nazývá se středová rovnice také **osová rovnice** hyperboly.

- Hyperbola se skládá ze dvou **větví** ležících v úhlech vymezených asymptotami. Jdou-li souřadnice bodu M $k \pm \infty$, blíží se bod M k asymptotě hyperboly.

- **Rovnoosá hyperbola** má obě poloosy stejně dlouhé ($a = b$). Často je umísťujeme tak, že $S = 0$, osami jsou osy kvadrantu a asymptotami souřadné osy. Pak je rovnice rovnoosé hyperboly: $y = \pm \frac{k}{x}$. (V praxi se užívá např. ke grafickému znázornění nepřímé úměrnosti...).



- Také hyperbolu lze vyjádřit parametricky. Například hyperbola, která má $S[0; 0]$, hlavní osa splývá s osou x , délka hlavní poloosy je a , vedlejší b , je **parametricky** určena takto:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{a}{\cos \varphi} \\ y &= b \cdot \operatorname{tg} \varphi \end{aligned} \right\} \varphi \in (0^\circ; 90^\circ) \cup (90^\circ; 270^\circ) \cup (270^\circ; 360^\circ)$$

- Hyperbola $\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$ má **asymptoty** $y - n = \pm \frac{b}{a}(x - m)$. Analogicky získáme asymptoty v dalších případech.

- Hyperbola dělí rovinu na tři části. Dvě části, ve kterých leží ohniska hyperboly, se nazývají vnitřkem hyperboly – každý jejích bod je vnitřním bodem hyperboly. Zbývající část se nazývá vnějším část hyperboly a každý její bod je vnějším bodem hyperboly. Body hyperboly do žádné z těchto částí nepočítáme.

- Označíme-li levou stranu obecné rovnice hyperboly $f(x, y)$, pak pro libovolný bod $L[x, y]$ platí:

- $f(x, y) = 0$, je-li L bodem hyperboly
- $f(x, y) > 0$, je-li L vnitřním bodem hyperboly
- $f(x, y) < 0$, je-li L vnějším bodem hyperboly

Např. Určete střed a délky poloos hyperboly $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{16} = 1$.

Řešení: Jedná se vlastně o osovou rovnici hyperboly $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, z čehož plyne, že: **$a = 7, b = 4, S[0; 0]$** .

Např. Napište osovou rovnici hyperboly, která má na ose x hlavní poloosu $a = 3$ a prochází bodem $M[5; 2]$.

Řešení: Osová rovnice takto zadané hyperboly je $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Dosazením souřadnic bodu M , tedy

$$x = 5, y = 2 \text{ a délky poloosy } a = 3 \text{ dostaneme: } \frac{25}{9} - \frac{4}{b^2} = 1. \text{ Odtud } b^2 = \frac{9}{4}. \text{ Rovnice má tvar } \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9/4} = 1.$$

Upravujeme na $x^2 - 4y^2 = 9$.

Rovnice hyperboly je $x^2 - 4y^2 = 9$.

Např. Určete osovou rovnici hyperboly s hlavní osou v ose x , která prochází bodem $A[5/3; 4/9]$ a jejíž asymptoty jsou $y = \pm \frac{1}{3}x$.

Řešení: Porovnáním rovnic asymptot $y = \pm \frac{1}{3}x$ s rovnicí $y = \pm \frac{b}{a}x$ dostáváme $\frac{b}{a} = \frac{1}{3}$. Odtud $a = 3b$. Dosadíme-li do osově rovnice hyperboly s hlavní osou v ose x , dostaneme: $\frac{x^2}{9b^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Souřadnice bodu A musí rovnici hyperboly vyhovovat, tedy: $\frac{(5/3)^2}{9b^2} - \frac{(4/9)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2 = \frac{1}{9}$ a osová rovnice hyperboly je rovnice, tedy $x^2 - 9y^2 = 1$.

Napiš. Napište rovnici rovnoosé hyperboly, jejímiž asymptotami jsou souřadnicové osy a která prochází bodem $M[-3; 2]$.

Řešení: Jedná se o rovnoosou hyperbolu, kterou lze vyjádřit rovnicí $y = \frac{k}{x}$. Bod M musí rovnici hyperboly vyhovovat, tedy $2 = \frac{k}{-3} \Rightarrow k = -6$. **Rovnice hyperboly je $y = \frac{-6}{x}$, neboli $xy = -6$.**

Napiš. Zjistěte, zda daná rovnice je rovnicí hyperboly, a je-li tomu tak, určete její střed, ohniska a délky poloos:

a) $9x^2 - 16y^2 - 36x + 32y - 124 = 0$

b) $9x^2 - 16y^2 - 36x + 32y + 20 = 0$

Řešení: a) Rovnici postupně upravujeme takto:

$$9x^2 - 36x - 16y^2 + 32y = 124 \Rightarrow 9(x^2 - 4x) - 16(y^2 - 2y) = 124 \Rightarrow 9(x^2 - 4x + 4) - 16(y^2 - 2y + 1) = 124 + 9 \cdot 4 - 16 \cdot 1 \Rightarrow 9(x-2)^2 - 16(y-1)^2 = 144 \Rightarrow \frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1$$

$$a^2 = 16 \Rightarrow a = 4, b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$$

Odtud vyplývá, že se jedná o rovnici hyperboly, která má $a = 4$, $b = 3$, střed $S[2; 1]$, hlavní osu rovnoběžnou s osou x , $e^2 = 16 + 9 = 25$, $e = 5$, $m - e = 2 - 5 = -3$, $m + e = 2 + 5 = 7$, tedy $E[-3; 1]$, $F[7; 1]$.

b) Analogickou úpravou dostaneme: $9x^2 - 16y^2 - 36x + 32y + 20 = 0 \Rightarrow \frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y-1)^2}{9} = 0$

Odtud vyplývá, že se **nejedná** o rovnici hyperboly.

PARABOLA

zapamatuj si

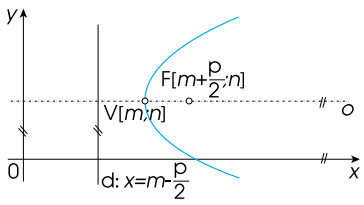
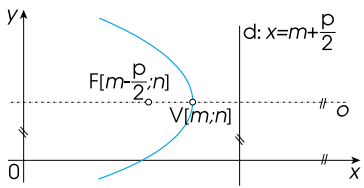
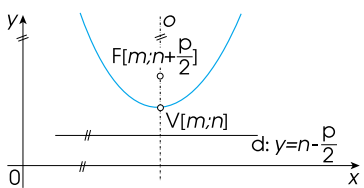
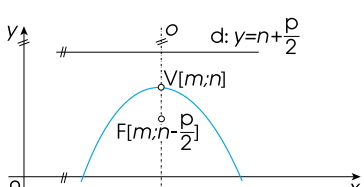
Parabola je množina všech bodů M v rovině, které mají stejnou vzdálenost od daného bodu F (ohniska) a řídící přímky d , která ohniskem neprochází. $|KM| = |MF|$.



V vrchol paraboly
F ohnisko paraboly
o osa paraboly
d řídící přímka
M libovolný bod paraboly
p parametr paraboly



- Vhodnou volbou soustavy souřadnic dostaneme vrcholovou rovnici paraboly, popř. obecnou rovnici paraboly.

Poloha paraboly v 0_{xy}	Rovnice paraboly
	Vrcholová rovnice $(y-n)^2 = 2p(x-m), p > 0$ Obecná rovnice $y^2 + Ax + By + C = 0, A \neq 0$
	Vrcholová rovnice $(y-n)^2 = -2p(x-m), p > 0$ Obecná rovnice $y^2 + Ax + By + C = 0, A \neq 0$
	Vrcholová rovnice $(x-m)^2 = -2p(y-n), p > 0$ Obecná rovnice $x^2 + Ax + By + C = 0, B \neq 0$
	Vrcholová rovnice $(x-m)^2 = -2p(y-n), p > 0$ Obecná rovnice $x^2 + Ax + By + C = 0, B \neq 0$

- Je-li $V[0; 0]$, pak vrcholová rovnice paraboly je: $y^2 = \pm 2px$, je-li $o \parallel x$ $x^2 = \pm 2py$, je-li $o \parallel y$
- Označíme-li levou stranu obecné rovnice paraboly $f(x;y)$, pak pro libovolný bod $L[x;y]$ je:
- $f(x;y) = 0$, je-li L bodem paraboly
 - $f(x;y) < 0$, je-li L vnitřním bodem paraboly
 - $f(x;y) > 0$, je-li L vnějším bodem paraboly

Např. Určete vrcholovou rovnici paraboly, ohnisko a rovnici řídicí přímky, je-li vrchol $V[0; 0]$, osa paraboly $o = x$ a parabola prochází bodem $A[1; -6]$.

Řešení: Je-li $V[0; 0]$ a osa paraboly leží v ose x , pak má parabola rovnici $y^2 = 2px$. Bod A na parabole leží, tedy jeho souřadnice musí rovnici paraboly vyhovovat: $(-6)^2 = 2p \cdot 1 \Rightarrow 2p = 36$.

Rovnice paraboly je **$y^2 = 36x$** . Jelikož $\frac{p}{2} = 9$, je **$F[9; 0]$** .

Řídicí přímka d má rovnici $d: x = -9$.

Např. Určete vrchol, osu, ohnisko a řídící přímku paraboly vyjádřené rovnicí: $x^2 - 8x - 3y + 10 = 0$.

Řešení: Rovnici postupně upravujeme takto:

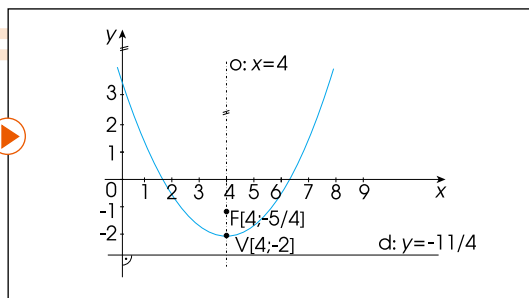
$$x^2 - 8x = 3y - 10.$$

$$x^2 - 8x + 16 = 3y - 10 + 16$$

$$(x-4)^2 = 3(y+2) \Rightarrow m = 4 \quad 2p = 3 \quad n = -2$$

Využitím vztahů: $V[m;n]$, $d: y = \frac{p}{2}$, $F\left[m; n + \frac{p}{2}\right]$, dostaneme výsledek (viz obr.):

Parabola má vrchol $V[4; -2]$, osu $o: x = 4$, řídící přímku $d: y = -11/4$.



Např. Určete rovnici, vrchol a ohnisko paraboly, která má osu rovnoběžnou s osou y a prochází body $K[5; 2]$, $L[-1; 5]$, $M[3; 1]$.

Řešení: Pokud hledaná parabola existuje, je dána rovnicí $x^2 + Ax + By + C = 0$, kde $B \neq 0$.

Body K , L , M leží na parabole, proto jejich souřadnice musí rovnici vyhovovat:

$$\left. \begin{array}{l} K[5; 2]: \quad 5^2 + 5A + 2B + C = 0 \\ L[-1; 5]: \quad (-1)^2 + (-1)A + 5B + C = 0 \\ M[3; 1]: \quad 3^2 + 3A + 1B + C = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow A = -6; B = -4; C = 13$$

Dosazením A , B , C do rovnice paraboly dostáváme $x^2 - 6x - 4y + 13 = 0$, neboli $(x-3)^2 = 4(y-1)$.

Odtud $m = 3$, $n = 1$, $\frac{p}{2} = 1$.

Parabola má vrchol $V[3; 1]$, ohnisko $F[3; 2]$, rovnici $x^2 - 6x - 4y + 13 = 0$.

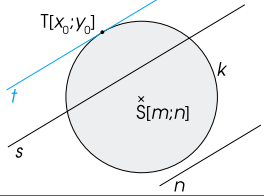
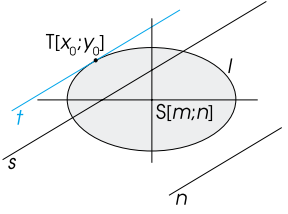
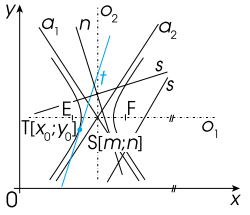
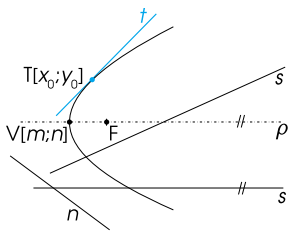
VZÁJEMNÁ POLOHA PŘÍMKY A KUŽELOSEČKY

zapamatuj si

- Při vyšetřování vzájemné polohy přímky a kuželosečky vyjádříme tyto útvary pomocí soustavy rovnic. Jestliže soustava složená z *lineární rovnice* (přímka) a *rovnice kvadratické* (kuželosečka) v $\mathbf{R}^2$:
 - má právě dvě řešení, má kuželosečka s přímkou společné dva body
 - má jedno řešení, má kuželosečka s přímkou společný jeden bod
 - nemá žádné reálné řešení, nemá kuželosečka s přímkou žádný bod společný
- **Tečna kuželosečky t** je přímka, která neobsahuje žádný bod vnitřní oblasti kuželosečky a má s kuželosečkou společný právě jeden bod **T (bod dotyku)**.
- **Sečna kuželosečky s** má s kuželosečkou buď společné právě dva body, nebo má s kuželosečkou společný právě jeden bod, ale není tečnou kuželosečky. (Se sečnami, které mají s kuželosečkami jediný společný bod, se můžeme setkat pouze u paraboly (přímka rovnoběžná s osou paraboly) a hyperboly (přímka rovnoběžná s asymptotou). Společné body kuželosečky a přímky nazýváme **průsečíky přímky a kuželosečky**.
- **Vnější přímka kuželosečky n** nemá s kuželosečkou žádný společný bod.
- Pokud existuje průsečík dvou tečen, nazývá se **pól kuželosečky**. Spojnice bodů dotyku těchto tečen s kuželosečkou je **polára p** .



■ Polohu přímky a kuželosečky popisuje tabulka:

Kuželosečka a přímka	Rovnice kuželosečky a její tečny v dotykovém bodě $T[x_0; y_0]$
	$k: x^2 + y^2 = r^2$ $t: xx_0 + yy_0 = r^2$ $k: (x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$ $t: (x-m)(x_0-m) + (y-n)(y_0-n) = r^2$
	$e: \frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$ $t: \frac{(x-m)(x_0-m)}{a^2} + \frac{(y-n)(y_0-n)}{b^2} = 1$ $e: \frac{(x-m)^2}{b^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1$ $t: \frac{(x-m)(x_0-m)}{b^2} + \frac{(y-n)(y_0-n)}{a^2} = 1$
	$h: \frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$ $t: \frac{(x-m)(x_0-m)}{a^2} - \frac{(y-n)(y_0-n)}{b^2} = 1$ $h: -\frac{(x-m)^2}{b^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1$ $t: -\frac{(x-m)(x_0-m)}{b^2} + \frac{(y-n)(y_0-n)}{a^2} = 1$
	$p: (x-m)^2 = 2p(y-n) \quad t: (x-m)(x_0-m) = p(y+y_0-2n)$ $p: (x-m)^2 = -2p(y-n) \quad t: (x-m)(x_0-m) = -p(y+y_0-2n)$ $p: (y-n)^2 = 2p(x-m) \quad t: (y-n)(y_0-n) = p(x+x_0-2m)$ $p: (y-n)^2 = -2p(x-m) \quad t: (y-n)(y_0-n) = -p(x+x_0-2m)$

■ Je-li $S[0; 0]$, resp. $V[0; 0]$ lze rovnice zjednodušit, např.

$$t_e: \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1, t_h: \frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1, t_p: xx_0 = p(y + y_0) \text{ atd.}$$

■ Rovnici **poláry** (spojnice bodů dotyku) dostaneme, dosadíme-li do rovnice tečny místo souřadnic bodů dotyku souřadnice pólu (tj. průsečíku tečen) $P[x_1; y_1]$.

■ Tečna kružnice pro $T[x_0; y_0]$:

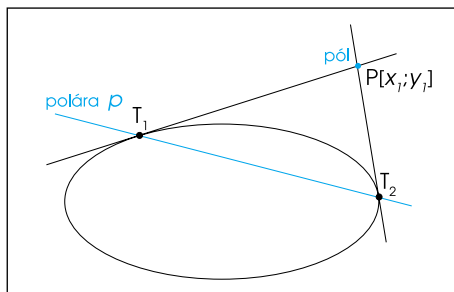
$$t: (x-m)(x_0-m) + (y-n)(y_0-n) = r^2$$

■ Polára kružnice s pólem $P[x_1; y_1]$:

$$p: (x-m)(x_1-m) + (y-n)(y_1-n) = r^2$$

■ Analogicky pro ostatní kuželosečky a jejich poláry.

Poláru lze výhodně použít, hledáme-li například rovnice tečen uvedených z bodu (pólu) ke kuželosečce.



- Přímka kolmá k tečně se nazývá *normála*. Její rovnici snadno dostaneme z rovnice tečny (normálový vektor tečny je směrovým vektorem normály).
- V praxi se často udávají rovnice tečen i kuželoseček v upraveném tvaru (s odstraněnými zlomky) – např. rovnici $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ upravíme na $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ a její tečnu na tvar $b^2xx_1 + a^2yy_1 = a^2b^2$.

Např. Určete vzájemnou polohu kružnice $x^2 + y^2 = 25$ a přímky $p: \begin{cases} x = 5 + 3t \\ y = 4t \end{cases} t \in \mathbb{R}$.

Řešení: Budeme hledat společné body kružnice a přímky. Z rovnice přímky dosadíme za x a y do rovnice kružnice: $(5 + 3t)^2 + (4t)^2 = 25 \Rightarrow 25t^2 + 30t = 0 \Rightarrow t_1 = 0, t_2 = -6/5$

Dosažením za t do rovnice přímky dostaneme společné body přímky a kružnice: $P_1[5; 0]; P_2[7/5; -24/5]$.

Přímka je sečnou kružnice.

Např. Napište rovnice tečen elipsy $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$, které se protínají v bodě $P[0; -3]$, a určete úhel, který tečny svírají.

Řešení: Rovnici elipsy řešíme s rovnicí poláry (bod $P[0; -3]$ je průsečíkem tečen, tedy pólem) a dostaneme body dotyku:

$$\begin{aligned} e: 5x^2 + 9y^2 = 45 & \quad p: 5xx_1 + 9yy_1 = 45 \\ \Rightarrow \begin{cases} 5x^2 + 9y^2 = 45 \\ 5x \cdot 0 + 9y \cdot (-3) = 45 \end{cases} & \Rightarrow \begin{cases} 5x^2 + 9y^2 = 45 \\ y = -5/3 \end{cases} \Rightarrow 5x^2 + 9(-5/3)^2 = 45. \end{aligned}$$

Odtud $x = -2$ a $y = -5/3$, tedy $T_1[-2; -5/3]$ nebo $x = 2$ a $y = -5/3$, tedy $T_2[2; -5/3]$.

Dosažením souřadnic bodů dotyku do rovnice tečny určíme rovnice tečen v T_1 a T_2 :

$$T_1[-2; -5/3]: t_1 \equiv 5x(-2) + 9y(-5/3) - 45 = 0 \Rightarrow t_1 \equiv 2x + 3y + 9 = 0$$

$$T_2[2; -5/3]: t_2 \equiv 5x(2) + 9y(-5/3) - 45 = 0 \Rightarrow t_2 \equiv 2x - 3y - 9 = 0$$

$$\text{Tečny svírají úhel } \varphi: \cos \varphi = \frac{|2 \cdot 2 + 3 \cdot (-3)|}{\sqrt{2^2 + 3^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{5}{13} \Rightarrow \varphi \doteq 67^\circ 22' 48''.$$

Např. Určete $k \in \mathbb{R}$ tak, aby přímka $y = kx - 8$ byla tečnou hyperboly $8x^2 - 18y^2 = 144$.

Řešení: K tomu, aby přímka (1) $y = kx - 8$ byla tečnou hyperboly (2) $8x^2 - 18y^2 = 144$, musí mít soustava rovnic (1) a (2) právě jedno řešení a přímka nesmí být rovnoběžná s asymptotou hyperboly. Řešíme soustavu: $y = kx - 8 \wedge 8x^2 - 18y^2 = 144$. Dosažením za y do rovnice (2) dostáváme:

$$8x^2 - 18(kx - 8)^2 - 144 = 0. \text{ Po úpravách: } x^2(4 - 9k^2) + 144kx - 648 = 0.$$

Tato kvadratická rovnice má jediné řešení, je-li její diskriminant roven nule. Užitím vzorce pro „sudé b “ dostáváme: $D = (-72k)^2 + (4 - 9k^2) \cdot 648$. Anulováním diskriminantu dostáváme:

$$72^2k^2 + 648(4 - 9k^2) = 0 \Rightarrow 8k^2 + (4 - 9k^2) = 0 \Rightarrow (2 - k)(2 + k) = 0. \text{ Odtud: } k_1 = 2, k_2 = -2.$$

Obě směrnice jsou různé od směrnic sympot (tzn. přímka není sečnou rovnoběžnou s asymptotou) a rovnice $y = 2x - 8$ i $y = -2x - 8$ vyjadřují tečny hyperboly.

Např. Napište rovnici tečny paraboly $y^2 = 18x$, která je rovnoběžná s přímkou $p: 3x - 4y + 17 = 0$. V bodě dotyku určete normálu paraboly.

Řešení: 1. způsob: Jestliže taková tečna existuje, pak má rovnici $yy_1 = p(x + x_1)$, kde $T[x_1; y_1]$ je bod dotyku, p je parametr paraboly. Z rovnice $y^2 = 18x$ vyplývá, že $p = 9$.

$$\text{Upravíme rovnici tečny a určíme její směrnici: } y = \frac{p}{y_1}x + p \cdot \frac{x_1}{y_1} \Rightarrow k = \frac{p}{y_1}.$$

$$\text{Tato směrnice musí být rovna směrnici dané přímky } p, \text{ tedy } k = \frac{3}{4}. \text{ Odtud } d: \frac{p}{y_1} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{9}{y_1} = \frac{3}{4} \Rightarrow y_1 = 12.$$

$$\text{Z rovnice } y^2 = 18x \text{ dostaneme } 144 = 18x_1 \Rightarrow x_1 = 8. \text{ Tedy } T[8; 12].$$

$$\text{Rovnice tečny je } y \cdot 12 = 9(x + 8). \text{ Po úpravě: } 3x - 4y + 24 = 0.$$

2. *způsob*: Existuje-li tečna rovnoběžná s přímkou $p: 3x - 4y + 17 = 0$, lze ji psát ve tvaru $3x - 4y + c = 0$.

Řešíme tedy soustavu rovnic:

(1) $3x - 4y + c = 0$ (2) $y^2 = 18x$. Z druhé rovnice je $x = \frac{y^2}{18}$. Po dosazení do (1) dostaneme po úpravách $y^2 - 24y + 6c = 0$.

Diskriminant $D = 576 - 24c$. Hodnotu c určíme z podmínky pro tečnu anulováním diskriminantu:

$D = 0 \Rightarrow c = 24$. Rovnice tečny je t: $3x - 4y + 24 = 0$. Tečna má normálový vektor $(3; -4)$.

Normála je k tečně kolmá, proto má normálový vektor $(4; 3)$ a platí pro ni rovnice $4x + 3y + c = 0$.

Jelikož bod $T[8; 12]$ na normále leží, musí jeho souřadnice této rovnici vyhovovat:

$4 \cdot 8 + 3 \cdot 12 + c = 0 \Rightarrow c = -68$. Rovnice normály je $n: 4x + 3y - 68 = 0$.

VZÁJEMNÁ POLOHA DVOU KUŽELOSEČEK

- V analytické geometrii určujeme vzájemnou polohu dvou kuželoseček řešením soustavy rovnic, kterými jsou kuželosečky vyjádřeny. Často hledáme nejen společné body obou křivek, ale zajímá nás **odchylka jejich tečen** ve společných průsečících tzv. **úhel křivek**.

Např. Určete průsečíky elipsy $x^2 + 2y^2 - 6 = 0$ a hyperboly $x^2 - y^2 - 3 = 0$.

Vypočítejte odchylku tečen v jednom jejich průsečíku.

Řešení: Průsečíky určíme řešením soustavy rovnic:

$$(1) \quad x^2 + 2y^2 = 6$$

$$(2) \quad \begin{array}{r} x^2 - y^2 = 3 \\ - \quad + \quad - \end{array}$$

Odečtením (2) od (1) dostaneme: $3y^2 = 3 \Rightarrow y = \pm 1$

Dosazením do (2) za y určíme x : $x^2 - 1 = 3 \Rightarrow x = \pm 2$

Průsečíky jsou vzhledem k poloze kuželoseček symetricky

rozloženy: $P_1[2; 1], P_2[-2; 1], P_3[-2; -1], P_4[2; -1]$

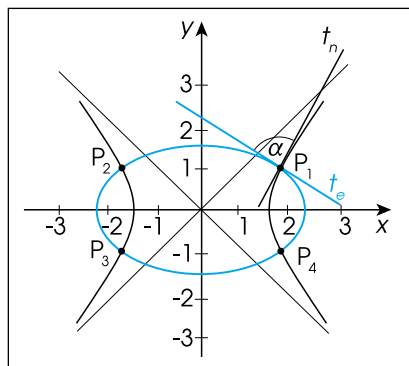
Tečny křivek v průsečíku $P_1[2; 1]$ jsou:

$$t_e: xx_0 + 2yy_0 = 6 \Rightarrow 2x + 2y = 6 \Rightarrow t_e: x + y - 3 = 0$$

$$t_h: xx_0 - yy_0 = 3 \Rightarrow 2x - 1y = 3 \Rightarrow t_h: 2x - y - 3 = 0$$

Pro odchylku tečen (úhel křivek) platí:

$$\cos \alpha = \frac{|1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1)|}{\sqrt{1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10} \approx 0,31623 \Rightarrow \alpha \approx 71^\circ 34'$$



■ **Poznámka:**

Jelikož rovnice $x^2 + 2y^2 - 6 = 0 \wedge y > 0$ je implicitním vyjádřením funkce $y = f(x)$ a obdobně $x^2 - y^2 - 3 = 0 \wedge y > 0$ implicitně vyjadřuje funkci $y = g(x)$, lze k určení úhlu křivek výhodně využít derivaci implicitní funkce (podrobněji viz literatura). Výše uvedeným způsobem určíme průsečík P_1 .

Směrnici tečen funkcí f, g určíme jako hodnotu první derivace těchto funkcí v bodě $P[2; 1]$:

$$f': 2x + 2 \cdot 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{2y} \Rightarrow k_e = y'(2; 1) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1} = -1$$

$$g': 2x - 2 \cdot yy' = 0 \Rightarrow y' = \frac{x}{y} \Rightarrow k_h = y'(2; 1) = \frac{2}{1} = 2$$

$$\text{Pro odchylku tečen } \alpha \text{ dostaneme: } \operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{k_e - k_h}{1 + k_e k_h} \right| \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{-1 - 2}{1 + (-1) \cdot 2} \right| = 3 \Rightarrow \alpha \approx 71^\circ 34'$$

7.5. KVADRATICKÉ ÚTVARY V PROSTORU

- Koule, rotační elipsoid, hyperboloid i paraboloid nazýváme **kvadratickými útvary**, neboť je lze v analytické geometrii popsat v 0_{xyz} kvadratickými rovnicemi. Na střední škole se zaměřujeme jen na kouli a kulovou plochu.

Kulová plocha	$S[m; n; p]$ $(x-m)^2 + (y-n)^2 + (z-p)^2 = r^2$	$r > 0$	$S[0; 0; 0]$ $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$
Koule	$S[m; n; p]$ $(x-m)^2 + (y-n)^2 + (z-p)^2 \leq r^2$	$r > 0$	$S[0; 0; 0]$ $x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2$
Tečná rovina	$S[m; n; p]$ $(x-m)(x_0-m) + (y-n)(y_0-n) + (z-p)(z_0-p) = r^2$	$T[x_0, y_0, z_0]$	$S[0; 0; 0]$ $xx_0 + yy_0 + zz_0 = r^2$

- Kulovou plochu lze vyjádřit kvadratickou rovnicí zvanou **obecná rovnice kulové plochy**:

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0, \text{ kde } S\left[-\frac{A}{2}; -\frac{B}{2}; -\frac{C}{2}\right] \text{ je střed plochy a její poloměr}$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - 4D}, \text{ přičemž } A^2 + B^2 + C^2 > 4D.$$

(Ne každá rovnice tohoto typu však vyjadřuje kulovou plochu!)

- Úlohy o kulových plochách a jejich tečných rovinách se řeší obdobnými postupy jako úlohy o kružnicích a jejich tečných.

Např. Rozhodněte, zda daná rovnice vyjadřuje kulovou plochu; pokud ano, určete její střed a poloměr.

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 4z - 86 = 0$

Řešení: 1. způsob: $+1 \quad +9 \quad +4 \quad +1+9+4$

$$(x^2 - 2x) + (y^2 + 6y) + (z^2 - 4z) = 86$$

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 100 \Rightarrow \text{Jedná se o kulovou plochu se středem } S[1; -3; 2]$$

a poloměrem $r = 10$

2. způsob: Porovnáním s obecnou rovnicí dostaneme: $A = -2$; $B = 6$; $C = -4$; $D = -86$.

$$S\left[-\frac{A}{2}; -\frac{B}{2}; -\frac{C}{2}\right] = \left[-\frac{(-2)}{2}; -\frac{6}{2}; -\frac{(-4)}{2}\right] = [1; -3; 2]$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - 4D} = \sqrt{(-2)^2 + 6^2 + (-4)^2 + 4 \cdot 86} = 10$$

Rovnice vyjadřuje kulovou plochu se středem $S[1; -3; 2]$, poloměrem $r = 10$.

b) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 4z + 86 = 0 \Rightarrow \dots (x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = -72$
 $r^2 < 0 \Rightarrow \text{Rovnice nevyjadřuje kulovou plochu.}$

Např. Napište rovnici kulové plochy, je-li její střed $S[1; 0; 2]$ a leží na ní bod $A[1; 2; -4]$.
 Pak určete rovnici tečné roviny kulové plochy v bodě A.

Řešení: Poloměr kulové plochy $r = |SA| = \sqrt{(1-1)^2 + (2-0)^2 + (-4-2)^2} = \sqrt{40}$.

Z rovnice $(x-m)^2 + (y-n)^2 + (z-p)^2 = r^2$ dostaneme po dosazení souřadnic středu $S[m; n; p]$ a poloměru r : $(x-1)^2 + (y-0)^2 + (z+2)^2 = 40$.

Úpravou získáme rovnici kulové plochy: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z - 35 = 0$.

Rovnice tečné roviny $(x-m)(x_0-m) + (y-n)(y_0-n) + (z-p)(z_0-p) = r^2$ dává po dosazení $A[x_0; y_0; z_0]$: $(x-1)(1-1) + (y-0)(2-0) + (z+2)(4+2) = 40$.

Po úpravě je rovnice tečné roviny v bodě A ve tvaru: $y + 3z - 14 = 0$.

Tečná rovina k dané kulové ploše v bodě

A je τ : $y + 3z - 14 = 0$.

jejich průsečík a odchylku.

Cvičení 7

7.1 Jsou dány body $A[2; 1]$, $B[-3; 4]$, $C[3; 5]$.

Určete:

- souřadnice vektoru $u = AB$ a jeho velikost
- souřadnice vektoru $v = AC$ a jeho velikost
- souřadnice vektoru $w = u + v$
- souřadnice vektoru $s = 2u - 3v$
- skalární součin $u \cdot v$

7.2 Určete vektorový součin vektorů:

$$u = (1; 3; -1), v = (-2; -4; 0)$$

7.3 V rovnoběžníku ABCD jsou dány vrcholy $A[2; 3]$, $B[-2; 0]$ a střed $S[3/2; -2]$.

Určete souřadnice zbývajících vrcholů a čtyřúhelník narysujte v soustavě O_{xy} .

7.4 Přímka p je určena body $A[0; 10]$ a $B[1; 15]$, přímka q body $C[-1; -1/4]$, $D[-9/8; 0]$.

- určete průsečík těchto přímek $P = p \cap q$,
- bodem P vedte přímku r tak, aby byla kolmá k přímce $l: x + 3y = 0$ a určete její obecnou rovnici.

7.5 Určete vzdálenost bodu $K[-3; -2; 1]$, od roviny ABC, je-li $A[-2; 10; 0]$, $B[0; 0; -7]$, $C[1; 6; -5]$.

7.6 Přímka a prochází body $A[1; -1; 3]$

a $B[3; 0; 0]$, přímka b je určena parametrickou rovnicí $b: \{x = -1-t, y = 1+t, z = -3+3t \mid t \in \mathbb{R}\}$. Určete vzájemnou polohu přímek a , b v prostoru. Jsou-li přímky různoběžné, stanovte

7.7 Napište rovnici kružnice opsané trojúhelníku ABC, jehož strany leží na přímkách $x + y + 3 = 0$, $x + y - 3 = 0$ a $x + 2y - 3 = 0$. Určete souřadnice vrcholů trojúhelníku a jeho obvod.

7.8 Napište obecnou rovnici elipsy, která se dotýká os souřadnic, má střed $S[5; -2]$ a osy rovnoběžné s osami souřadnic.

7.9 Určete vzdálenost středu kuželosečky $x^2 - 4y^2 + 6x + 32y - 155 = 0$ od vrcholu paraboly $y^2 - 4y - 6y + 1 = 0$.

7.10 Určete průsečíky hyperboly $x^2 - y^2 = 16$ s parabolou $y^2 = \frac{9}{5}x$. Pak napište rovnice tečen k oběma křivkám tak, aby tyto tečny procházely průsečíkem křivek, který leží v prvním kvadrantu. Určete úhel těchto tečen.

7.11 Určete hodnotu parametru $q \in \mathbb{R}$ tak, aby přímka $p: y + q = 0$ byla tečnou kuželosečky $x^2 + 4y^2 + 4x - 8y - 28 = 0$.

7.12 Napište rovnici plochy kulové χ , která má střed totožný se středem koule $x^2 + y^2 + z^2 \leq 25$ a prochází bodem $A[1; 2; 3]$. Pak určete obecnou rovnici tečné roviny τ této kulové plochy v bodě dotyku A.

Test 7

- 7.1 Má-li úsečka krajní body A, B a střed S a je-li $A[1/2; 3]$, $S[-3/4; 17/8]$, pak platí:
- $B[-1/4; -5/4]$
 - $B[-2; -5/4]$
 - $B[2; -5/4]$
 - $B[-2; 5/4]$
 - $B[-8; -7/8]$
- 7.2 Pro vektory $\mathbf{u} = (3; -2)$, $\mathbf{v} = (4; 6)$ platí:
- vektory jsou navzájem kolmé
 - vektory mají opačný směr
 - vektor $\mathbf{v}$ je dvojnásobkem vektoru $\mathbf{u}$
 - vektory nejsou rovnoběžné
 - $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = 0$
- 7.3 Vektor $\mathbf{u} = (-3; -2)$ je vzhledem k přímce p : $3x + 2y - 1 = 0$
- normálovým vektorem přímky p
 - směrovým vektorem přímky p
 - vektorem rovnoběžným s přímkou p
 - vektorem kolmým k přímkou p
 - vektorem opačným ke směrovému vektoru přímky p
- 7.4 Napište obecnou rovnici kružnice, jejímž průměrem je úsečka s krajními body $A[-1; 1]$ $B[1; -1]$.
- 7.5 Je dána rovina ρ : $\{x = -1 + 3s - t, y = 1 - 6s + 3t, z = 2 + 4s - 3t \mid s, t \in \mathbf{R}\}$ a bod $P[1; 1; -2]$. Pak platí:
- rovina ρ prochází bodem P
 - bod P neleží v rovině ρ
 - bod P leží v rovině ρ
 - bod P má vzdálenost od roviny ρ rovnu 5j
 - bod P je bodem, jehož vzdálenost od roviny ρ je nulová
- 7.6 Parabola má ohnisko $F[4; 2]$ a řídící přímku $d: y = -2$. Pak platí:
- osa paraboly je rovnoběžná s osou x
 - osa paraboly je rovnoběžná s osou y
 - parabola má s osou x společný právě jeden bod
 - parabola protíná osu y ve dvou různých bodech
 - parabola osu y neprotíná
- 7.7 Určete hodnoty parametrů $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$, aby rovnice $ax^2 + by^2 = 81$ byla rovnicí kružnice s poloměrem $r = 3$.
- 7.8 Určete vzdálenost středů kuželoseček $9x^2 - 16y^2 + 64y - 208 = 0$ a $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$.
- 7.9 Napište rovnici tečny kuželosečky $x^2 - 8x - 3y + 10 = 0$ v bodě $T[x_0; -2]$.
- 7.10 Necht S je středem kuželosečky $9x^2 - 16y^2 - 36x + 32y - 124 = 0$, bod O je počátkem soustavy O_{xy} . Pro polopřímku $\rightarrow SO$ platí:
- první souřadnice libovolného bodu polopřímky $\rightarrow SO$ je rovna druhé souřadnici tohoto bodu
 - všechny souřadnice bodů dané polopřímky jsou nezáporné,
 - obě souřadnice bodů dané polopřímky mají vždy stejná znaménka, popř. se obě rovnají současně nule,
 - souřadnice mají hodnotu vždy menší než 4

8. Posloupnosti a řady

8.1. POSLOUPNOSTI

Definice

Posloupnost je funkce definovaná v množině přirozených čísel $\mathbb{N}$.

- **Funkční hodnoty** posloupnosti přiřazené přirozenému číslu n se nazývají **členy posloupnosti** a značí se např. $a_n, b_n, \dots$
- **Konečná posloupnost** (definičním oborem je množina prvních k přirozených čísel) se zapisuje: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$, resp. $\{a_n\}_{n=1}^k$
- **Nekonečná posloupnost** (definičním oborem je celá množina $\mathbb{N}$) se zapisuje: $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, resp. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, popř. $(a_n)_{n=1}^{\infty}$
- **Grafem** posloupnosti je řada izolovaných bodů $[n; a_n]$, kde $n \in \mathbb{N}$
- **Zadání posloupnosti**
 - *slovním předpisem*,
 - *výčtem prvků* (u konečných posloupností),
 - *graficky* (u konečných posloupností),
 - *rekurentním vzorcem* (zadány první členy a vztah pro výpočet dalších členů, pomocí členů předcházejících),
 - *vzorcem pro n -tý člen*.

Např. Posloupnost je *slovním předpisem* zadána takto: „Členy posloupnosti tvoří prvních pět přirozených lichých čísel uspořádaných vzestupně“. Vyjádřete tuto posloupnost dalšími způsoby.

Řešení: Posloupnost lze určit:

■ **výčtem prvků:** $\{1; 3; 5; 7; 9\}$

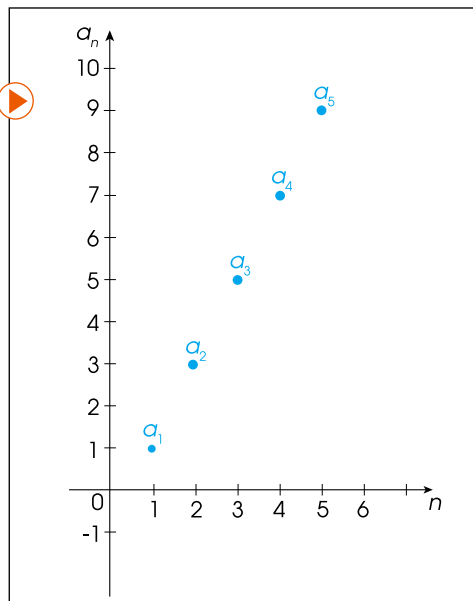
■ **graficky**

■ **rekurentním vzorcem:**

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + 2 \\ n \in \{1; 2; 3; 4\} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 + 2 = 3 \\ a_3 = 3 + 2 = 5 \\ a_4 = 5 + 2 = 7 \\ a_5 = 7 + 2 = 9 \end{array}$$

■ **vzorcem pro n -tý člen**

$$a_n = 2n - 1 \Rightarrow a_n = \{2n - 1\}_{n=1}^5$$



■ **Vlastnosti** posloupnosti i její **názvy** vycházejí z vlastností funkcí:

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá:		
rostoucí	$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}: a_{n+1} > a_n$	} monotónní posloupnosti,
klesající	$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}: a_{n+1} < a_n$	
nerostoucí	$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}: a_{n+1} \leq a_n$	
neklesající	$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}: a_{n+1} \geq a_n$	
omezená shora	$\Leftrightarrow$ existuje takové $h \in \mathbb{R}$, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $a_n \leq h$,	
omezená zdola	$\Leftrightarrow$ existuje takové $d \in \mathbb{R}$, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $a_n \geq d$,	
omezená	$\Leftrightarrow$ posloupnost je omezená shora i zdola zároveň.	

Např. Posloupnost $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je **omezená zdola** (neboť $a_n \geq d = 1/2$) i **shora omezená** (neboť $a_n < h = 1$) a **rostoucí** (neboť $\forall n \in \mathbb{N}: a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{(n+1)+1} - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} > 0 \Rightarrow a_{n+1} > a_n$).

Např. Posloupnost $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je **omezená shora** (neboť $a_n \leq d = 2$) i **zdola omezená** (neboť $a_n > h = 1$) a **klesající** (neboť $\forall n \in \mathbb{N}: a_{n+1} - a_n = \frac{(n+1)+1}{(n+1)} - \frac{n+1}{n} = -\frac{1}{n(n+1)} < 0 \Rightarrow a_{n+1} < a_n$).



8.2. ARITMETICKÁ A GEOMETRICKÁ POSLOUPNOST

zapamatuj si

Aritmetická posloupnost	Geometrická posloupnost
rekurentní definice	
Je-li d (diference) libovolné reálné číslo, pak $a_{n+1} = a_n + d$.	Je-li q (kvocient) libovolné reálné číslo, pak $a_{n+1} = a_n \cdot q$.
n-tý člen posloupnosti	
$a_n = a_1 + (n-1)d$ pro $n > 1$ aritmetický průměr: $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$	$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ pro $n > 1$ geometrický průměr: $ a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$
libovolné členy a_r, a_s ($r > s$)	
$a_r = a_s + (r-s) \cdot d$	$a_r = a_s \cdot q^{r-s}$
součet prvních n členů	
$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$	pro $q \neq 1$: $s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$ pro $q = 1$: $s_n = n \cdot a_1$
graf	
Množina izolovaných bodů ležících na přímce ($a_n = d \cdot n + (a_1 - d)$).	Je-li $q > 0 \wedge q \neq 1$, je grafem množina izolovaných bodů ležících na exponenciální křivce ($a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$).

poznámka

- ① Důkazy vzorců pro a_n, s_n lze snadno provést matematickou indukcí.
- ② V praxi mají význam aritmetické posloupnosti, kde $d \neq 0$ (obdobně geometrické posloupnosti, kde $a \neq 0 \wedge q \neq 0$).
- ③ Geometrická posloupnost vede ke vzorcům finanční aritmetiky.



Např. V aritmetické posloupnosti je $a_2 = 10, d = -15$. Určete prvních pět členů této posloupnosti, dvacátý člen a součet prvních dvaceti členů.

Řešení: a) ze vztahu $a_{n+1} = a_n + d$ plyne:

$$a_2 = a_1 + d \Rightarrow a_1 = a_2 - d = 25$$

$$a_3 = a_2 + d \Rightarrow a_3 = -5, \text{ analogicky } a_4 = a_3 + d \Rightarrow a_4 = -20, a_5 = a_4 + d \Rightarrow a_5 = -35$$

$$\text{Platí: } a_1 = 25, a_2 = 10, a_3 = -5, a_4 = -20, a_5 = -35$$

b) ze vztahu $a_n = a_1 + (n-1)d$ dostáváme:

$$a_{20} = 25 + (20-1) \cdot (-15) \Rightarrow a_{20} = -260$$

c) součet prvních dvaceti členů je $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$, kde $n = 20$

$$s_{20} = \frac{20}{2} [25 + (-260)] \Rightarrow s_{20} = -2350$$

Např. Určete součet prvních pěti členů geometrické posloupnosti, pro kterou platí:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 26 \wedge a_1 + a_3 = 20.$$

Řešení: Ze vztahu $a_{n+1} = a_n \cdot q$ dostáváme: $a_2 = a_1 q, a_3 = a_1 q^2$. Tedy:

$$\left. \begin{array}{l} (1) a_1 + a_1 q^2 = 20 \\ (2) a_1 + a_1 q + a_1 q^2 = 26 \end{array} \right\} \Rightarrow a_1 q + 20 = 26 \Rightarrow a_1 q = 6 \Rightarrow q = \frac{6}{a_1}$$

$$\text{Po dosazení do rovnice (1): } a_1 + a_1 \cdot \frac{36}{a_1^2} = 20 \Rightarrow a_1^2 - 20a_1 + 36 = 0$$

$$a_1 = 2 \wedge q = 3 \Rightarrow s_5 = a_1 \cdot \frac{q^5 - 1}{q - 1} = 2 \cdot \frac{3^5 - 1}{3 - 1} = 242$$

$$a_1 = 18 \wedge q = \frac{1}{3} \Rightarrow s_5 = a_1 \cdot \frac{q^5 - 1}{q - 1} = 18 \cdot \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^5 - 1}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{242}{9}$$

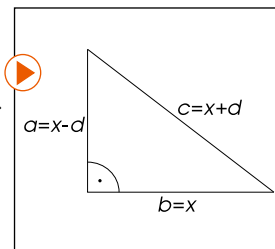
Součet prvních pěti členů geometrické posloupnosti je buď 242 nebo $\frac{242}{9}$.

Např. Velikosti stran pravoúhlého trojúhelníku tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. Přepona má délku 30 cm. Určete délky odvěsen.

Řešení: Označíme-li: $a = x - d, b = x, c = x + d$, pak:

$$(1) d = 30 - x \quad (\text{přepona})$$

$$(2) (x-d)^2 + x^2 = 30^2 \quad (\text{Pythagorova věta})$$



$$\text{Úpravou (2'): } (x - 30 + x)^2 + x^2 = 30^2 \Rightarrow 5x^2 - 120x = 0 \Rightarrow (x_1 = 0), x_2 = 24$$

$$\text{difference } d = 30 - 24 = 6 \Rightarrow a = x - d = 24 - 6 = 18$$

Strany jsou 18 cm, 24 cm a 30 cm.

Např. Mezi čísla 3 a 18 vložte dvě čísla tak, aby první tři tvořila **geometrickou posloupnost** a poslední tři **posloupnost aritmetickou**.

Řešení: $3; a_2; a_3 \dots$ geometrická posloupnost ... (1) $\frac{a_2}{3} = \frac{a_3}{a_2}$
 $a_2; a_3; 18 \dots$ aritmetická posloupnost ... (2) $8 - a_3 = a_3 - a_2$
 Dosazením $a_3 = \frac{18 + a_2}{2}$ z (2) do (1) dostaneme $2a_2^2 - 3a_2 - 54 = 0$ a odtud $a_2 = -\frac{9}{2}$ nebo 6.
 Z toho plynou 2 řešení: 3, $-9/2$, $27/4$, 18 nebo 3, 6, 12, 18.

Např. Ve městě průměrně ročně přibývá 50 obyvatel na 1000 lidí. Za kolik let se počet obyvatel města tímto tempem růstu zdvojnásobí?

Řešení: Roční přírůstek obyvatel je $p = 5 \%$.

Počet obyvatel na počátku ... N_0

Počet obyvatel na konci 1. roku ... $N_1 = N_0 + N_0 \cdot \frac{p}{100} = N_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)$

Počet obyvatel na konci 2. roku ... $N_2 = N_1 + N_1 \cdot \frac{p}{100} = N_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right) + N_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right) \frac{p}{100} = N_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$
 $\vdots$

Počet obyvatel na konci n -tého roku ... $N_n = N_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$

Pro zadanou úlohu je $N_n = 2N_0$ a tedy platí: $2N_0 = N_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \Rightarrow 2 = \left(1 + \frac{5}{100}\right)^n \Rightarrow n \doteq 14,2$

Počet obyvatel ve městě se zdvojnásobí přibližně za 14 let.

8.3. LIMITA POSLOUPNOSTI

Definice:

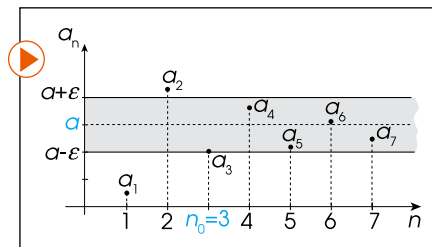
Říkáme, že reálné číslo a je **limitou posloupnosti** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, právě když ke každému reálnému číslu $\varepsilon > 0$ existuje takové $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro všechna přirozená čísla $n > n_0$ je $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, tj. platí $|a_n - a| < \varepsilon$. **Zapisujeme** $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

■ Geometrický význam limity:

Má-li posloupnost limitu a , pak ke každému (libovolně malému) $\varepsilon > 0$, existuje takové přirozené číslo n_0 , že pro všechna $n > n_0$ leží všechny body grafu posloupnosti uvnitř pásu, jehož hraniční přímky jsou rovnoběžky procházející body $a + \varepsilon$, $a - \varepsilon$ kolmo ke svislé ose grafu.

■ Posloupnost, která má vlastní limitu ($a \in \mathbb{R}$) se nazývá **konvergentní**.

■ Posloupnosti, které nejsou konvergentní, se nazývají **divergentní** (divergují $k + \infty$ nebo $k - \infty$, nebo jsou oscilující), zapisujeme $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, resp. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$.



■ Pro limity posloupností platí věty:

- (1) Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.
- (2) Je-li posloupnost konvergentní, pak je omezená (obrácená věta neplatí).
- (3) Jsou-li posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentní, pak platí:

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ Limita součtu je rovna součtu limit.
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ Limita rozdílu je rovna rozdílu limit.
- c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ Limita součinu je rovna součinu limit.
- d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$ Pro $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$ je limita podílu rovna podílu limit.
- e) $\lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$



poznámka

- Lze dokázat, že žádná aritmetická posloupnost s $d \neq 0$, a žádná geometrická posloupnost s $|q| > 1$ nemá vlastní limitu. Má-li geometrická posloupnost $|q| < 1$, pak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.
- Posloupnost $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí a zdola omezená číslem 2, shora číslem 3. Má tedy limitu, kterou označujeme e (Eulerovo číslo): $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. **Eulerovo číslo $e = 2,718281 \dots$** je základem přirozených logaritmů.
- Při řešení příkladů využíváme $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0$, kde $k \in \mathbb{N}$. (Např. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$, atd.).

Např.

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-2}{5n+1} \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4-\frac{2}{n}}{5+\frac{1}{n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (4-\frac{2}{n})}{\lim_{n \rightarrow \infty} (5+\frac{1}{n})} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 4 - 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 5 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}} = \frac{4-0}{5+0} = \frac{4}{5}$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+2n}{3n^2+1} \right)^2 = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+2n}{3n^2+1} \right)^2 = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+2n}{3n^2+1} \cdot \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} \right)^2 = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{2}{n}}{3+\frac{1}{n^2}} \right)^2 = \left(\frac{1}{3} \right)^2 = \frac{1}{9}$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot (n - \sqrt{1+n^2}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n - \sqrt{1+n^2})(n + \sqrt{1+n^2})}{(n + \sqrt{1+n^2})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n^2-1-n^2)}{n + \sqrt{1+n^2}} \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{1 + \sqrt{\frac{1}{n^2} + 1}} = -\frac{1}{2}$$

8.4. NEKONEČNÁ ŘADA A JEJÍ SOUČET

Definice:

Je-li $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, posloupnost, která má členy $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, pak výraz $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ se nazývá **nekonečná řada**. Číslům $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ se říká členy nekonečné řady.

■ Příklady nekonečných řad:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 - 1) = 0 + 3 + 8 + \dots + (n^2 - 1) + \dots & \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2}{n} = -2 + 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{2}{5} + \dots \\ \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-1} + \dots & \text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \dots \end{array}$$

■ Pro danou nekonečnou řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ vytvoříme posloupnost částečných součtů $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n \end{aligned}$$

Existuje-li pro posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ limita $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s \in \mathbb{R}$, pak tuto limitu nazýváme **součtem nekonečné řady** a říkáme, že nekonečná řada je **konvergentní** (v opačném případě je řada **divergentní**).

Zapisujeme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$ ($\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ značí tedy nejen nekonečnou řadu, ale i její součet).

■ Věty o konvergenci, resp. divergenci některých nekonečných řad:

- (1) Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$... nutná podmínka konvergence.
- (2) Každá aritmetická nekonečná řada $a_1 + (a_1 + d) + \dots + [a_1 + (n-1)d] + \dots$, kde $d \neq 0$ je divergentní.
- (3) Geometrická nekonečná řada $a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-1} + \dots$ je:
 - a) konvergentní právě tehdy, je-li $|q| < 1$ a pro její součet platí $s = \frac{a_1}{1-q}$
 - b) divergentní, je-li $|q| \geq 1$
- (4) Harmonická řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ je divergentní.

Např. a) Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n} = 0 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots$ **nekonverguje**, neboť nesplňuje nutnou podmínku konvergence $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} \neq 0$. Je to řada **divergentní**.

b) Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$ **konverguje**, neboť je to geometrická řada a platí $|q| < 1$. Řada splňuje nutnou podmínku konvergence:

$$\text{součet } s = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1. \text{ Tedy } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$



poznámka

① Pomocí nekonečných řad lze definovat např.:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots, \text{ kde } x \in \mathbb{R} \quad e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \text{ kde } x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots, \text{ kde } x \in \mathbb{R} \text{ atd.} \quad (\text{Leibnizova řada})$$

② Řady umožňují převést racionální číslo dané periodickým desetinným rozvojem na zlomek.

Např. $0,\overline{51} = \frac{51}{10^2} + \frac{51}{10^4} + \dots + \frac{51}{10^{2n}} + \dots$

Jedná se o nekonečnou geometrickou řadu, kde $a_1 = \frac{51}{10^2}$, $q = \frac{1}{10^2}$.

$$\text{Platí } 0,\overline{51} = \frac{a_1}{1-q} = \frac{51 \cdot 10^{-2}}{1-10^{-2}} = \frac{51}{10^2-1} = \frac{51}{99} = \frac{17}{33}.$$

Např. Řešte v $\mathbb{R}$: a) $1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} + \frac{8}{x^3} + \dots = \frac{4x-3}{3x-4}$

b) $3^x + 9^x + 27^x + 81^x + \dots = 1$

Řešení: a) Levá strana rovnice je tvořena nekonečnou geometrickou řadou, která pro

$$\left| \frac{2}{x} \right| < 1 \text{ tj. } x \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty) \text{ konverguje a platí: } \frac{1}{1 - \frac{2}{x}} = \frac{4x-3}{3x-4}$$

$$\text{Odtud } x^2 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x-1) \vee (x-6).$$

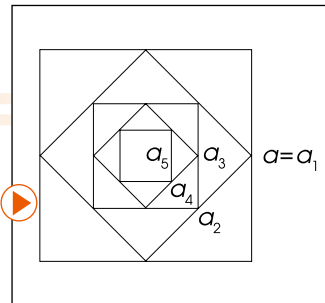
Vyhovuje řešení $K = \{6\}$.

b) Rovnici lze upravit na tvar $3^x + (3^x)^2 + (3^x)^3 + (3^x)^4 + \dots = 1$. Levá strana rovnice je dána nekonečnou geometrickou řadou s kvocientem $q = 3^x$, která pro $|3^x| < 1$ tedy pro $x < 0$ konverguje a platí:

$$\frac{3^x}{1-3^x} = 1 \Rightarrow 3^x = 1-3^x \Rightarrow 2 \cdot 3^x = 1 \Rightarrow 3^x = \frac{1}{2} \Rightarrow x \log 3 = \log \frac{1}{2} \Rightarrow x \log 3 = \log 1 - \log 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \log 3 = -\log 2 \Rightarrow x = \frac{-\log 2}{\log 3} \Rightarrow x \doteq -0,6309 < 0$$

$$K = \left\{ -\frac{\log 2}{\log 3} \right\}$$



Např. Je dán čtverec o straně délky a . Spojnice středů jeho stran utvoří opět čtverec. Do tohoto čtverce je vepsán čtverec stejným způsobem atd. Vypočítejte, ke které hodnotě se blíží součet obvodů a součet obsahů všech čtverců, které vzniknou výše uvedeným způsobem.

Řešení: Strany uvažovaných čtverců mají délku: $a_1 = a$, $a_2 = \frac{a_1\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $a_3 = \frac{a_2\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{2}$, $a_4 = \frac{a_3\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$ atd.

Odtud pro obvody čtverců vyplývá: $O_1 = 4a$, $O_2 = 2a\sqrt{2}$, $O_3 = 2a$, $O_4 = a\sqrt{2}$ atd.

Tato čísla tvoří geometrickou posloupnost s kvocientem $q = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$.

Součet obvodů je pak dán nekonečnou konvergentní geometrickou řadou:

$4a + 2a\sqrt{2} + 2a + a\sqrt{2} + \dots$, která má součet

$$s_0 = \frac{4a}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{8a}{2 - \sqrt{2}} \cdot \frac{2 + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = \frac{8a(2 + \sqrt{2})}{2} = 4a(2 + \sqrt{2})$$

Pro **obsahy čtverců** platí: $S_1 = a^2$, $S_2 = \frac{a^2}{2}$, $S_3 = \frac{a^2}{4}$, $S_4 = \frac{a^2}{8}$ atd.

Součet obsahů je dán nekonečnou konvergentní geometrickou řadou $a^2 + \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{8} + \dots$, která má

$$\text{součet } s_s = \frac{a^2}{1 - \frac{1}{2}} = 2a^2.$$

Závěr: Součet obvodů čtverců dané vlastnosti je $4a(2 + \sqrt{2})$, součet obsahů těchto čtverců je $2a^2$.

Cvičení 8

- 8.1 Vypište prvních pět členů posloupnosti $\{2n - 1\}_{n=1}^{\infty}$ a určete o jakou posloupnost se jedná.
- 8.2 Vynálezce šachu chtěl za odměnu na první políčko šachovnice jedno zrna pšenice, na každé další políčko vždy dvojnásobek počtu zrn, které byly na předchozím poli. O jaké určení posloupnosti se jedná? Pokuste se popsat posloupnost vhodným vzorcem. Kolik zrn bude na posledním poli šachovnice?
- 8.3 Vypište prvních pět členů posloupnosti zadané rekurentním vztahem $a_1 = -1$, $a_{n+1} = -2a_n + 3$.
- 8.4 Určete, zda posloupnost $\{2n + 1\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí, neklesající, omezená.
- 8.5 Určete součet prvních padesáti členů posloupnosti:
 - a) $\{2n - 1\}_{n=1}^{\infty}$
 - b) $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$
- 8.6 Určete součet prvních šesti členů aritmetické posloupnosti, pro kterou platí: $a_1 + a_2 = 22 \wedge a_3 \cdot a_4 = 88$. Vypočítejte také a_1 , a_6 .
- 8.7 V geometrické posloupnosti je $a_2 = 12$, $a_4 = 48$. Určete a_5 .
- 8.8 Určete obsah pravoúhlého trojúhelníka, jehož délky stran tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti a poloměr kružnice tomuto trojúhelníku opsané je 5 cm.

8.9 V lese přibývá každým rokem 7,18 % dřevní hmoty. Za kolik let se při stálém ročním přírůstu ku dřevní hmoty v lese zdvojnásobí?

8.10 Vypočtěte:

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-2}{2n+5}$
 b) $\lim_{n \rightarrow \infty} 2(n - \sqrt{n+n^2})$
 c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-2}{(4+n)^2}$

8.11 Rozhodněte, zda je řada konvergentní a v kladném případě určete její součet:

- a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$
 b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot 3^n$
 c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

8.12 Řešte v **R**:

- a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{x}\right)^{n-1} = \frac{4x-3}{3x-4}$
 b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-\sin x)^{n-1} = \frac{1}{\cos x}$
 c) $\sum_{n=1}^{\infty} (3^x)^n = 1$

8.13 Převedte na zlomek:

- a) 0,2348
 b) 2,634

8.14 Do čtverce je vepsán kruh, do kruhu opět čtverec, do nového čtverce opět kruh atd. Určete součet obsahů všech kruhů, má-li původní čtverec stranu délky $\sqrt{2}$ m.

Test 8

8.1 Posloupnost $\{-4; -2; 0; 2; 4\}$ je:

- a) konečná
 b) geometrická
 c) aritmetická
 d) rostoucí

8.2 Součet prvních n lichých přirozených čísel je:

- a) $2n-1$
 b) $2n+1$
 c) n^2
 d) ∞

8.3 Určete součet prvních tří po sobě jdoucích členů aritmetické posloupnosti, pro kterou platí:

$$a_4 = 12 \wedge a_6 = 18.$$

8.4 Posloupnost $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ není:

- a) rostoucí
 b) klesající
 c) omezená shora
 d) omezená zdola

8.5 Hladina jezírka se pokrývá lekníny tak, že se plocha pokrytá lekníny za den zdvojnásobí. Třicátý den byla hladina plná leknínů. Kolikátý den byla zakryta lekníny polovina hladiny jezírka?

8.6 Střecha tvaru lichoběžníka je pokryta taškami. U okapu jich je 100, v každé následující řadě o 1 méně. V poslední řadě je 85 tašek. Kolik tašek je celkem na střeše?

8.7 V posloupnosti zadané rekurentně platí:
 $a_{n+1} = 2a_n \wedge a_3 = 5$. Určete její první člen.

8.8 Vypočtěte: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-3)^2 + 4n}{4n^2 + 5}$.

8.9 Převedte na zlomek číslo $0,\bar{4}$.

8.10 Je dán čtverec o straně 4 m. Spojnice středů jeho stran tvoří opět čtverec. Do tohoto nového čtverce je opět stejným způsobem vepsán čtverec a postup se opakuje do nekonečna. Jaký je součet obsahů všech takto vytvořených čtverců?

9. Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika



9.1. VARIACE A PERMUTACE

zapamatuj si

Variace k -té třídy z n prvků bez opakování dané základní n -prvkové množiny ($0 \leq k \leq n$) je každá uspořádaná k -tice sestavená z těchto prvků tak, že záleží na pořadí prvků (a prvky se neopakují).

Počet $V_k(n)$ všech variací bez opakování je $V_k(n) = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$.

Např. $V_3(10) = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ $V_2(6) = 6 \cdot 5 = 30$ $V_5(5) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

- Je-li $n=k$, pak variace bez opakování n -té třídy z n prvků se nazývají **permutace bez opakování**.

Počet $P(n)$ všech možných permutací n prvků bez opakování je $P(n) = n \cdot (n-1)(n-2)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$ (čti n -faktoriál)

- Definujeme $0! = 1$
- Platí: $n! = n(n-1)! = n(n-1)(n-2)! = n(n-1)(n-2)(n-3)! = \dots$ atd.
 $1! = 1$ $2! = 2 \cdot 1 = 2$ $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ (čti n -faktoriál) atd.
- Pak $V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!}$

Např. Kolika způsoby lze z 30 členů organizace zvolit předsedu, místopředsedu a pokladníka?

Řešení: Ze 30 prvků vybíráme 3, přičemž záleží na pořadí – jedná se tedy o variace:

$$V_3(30) = 30 \cdot 29 \cdot 28 = 24360.$$

Např. Kolik různých přirozených čísel lze sestavit z cifer 1, 2, 3, 4, 5, jestliže se cifry v čísle neopakují?

Řešení: Jedná se o permutace: $P(5) = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

- Pokud nemusí být prvky k -tice různé (tj. mohou-li se opakovat), hovoříme o **variacích s opakováním** resp. **permutacích s opakováním**.

Počet k -členných variací s opakováním z n prvků je $V'_k(n) = n^k$.

Např. Kolik různých vrhů lze provést 4 kostkami s označenými stěnami jednou až šesti tečkami?

Řešení: Jde o čtyřčlenné variace s opakováním ze 6 prvků. Jejich počet je $V'_4(6) = 6^4 = 1296$.

Pro počet $P'(k_1, k_2, \dots, k_n)$ všech permutací k prvků s opakováním z daných n prvků ($k > n$), přičemž se první prvek opakuje k_1 -krát, druhý k_2 -krát atd. je $P'(k_1, k_2, \dots, k_n) = \frac{k!}{k_1! k_2! \dots k_n!}$, kde $k = k_1 + k_2 + \dots + k_n$.

Např. Kolik permutací s opakováním lze vytvořit z písmen slova OKOLO?

Řešení: Všech písmen je 5. O se opakuje třikrát; počet všech permutací s opakováním je:

$$P'(3, 1, 1) = \frac{5!}{3! 1! 1!} = \frac{120}{6} = 20.$$

9.2. KOMBINACE

zapamatuj si

Kombinace k -té třídy z n prvků bez opakování dané základní n -prvkové množiny ($0 \leq k \leq n$) je každá ktice různých prvků sestavená z prvků základní množiny tak, že nezáleží na pořadí prvků (a prvky se neopakují).



Pro počet kombinací $C_k(n)$ platí: $C_k(n) = \frac{V_k(n)}{P(k)} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$

■ Symbol $\binom{n}{k}$ se nazývá **kombinační číslo** (čti n nad k).

Např. $\binom{8}{5} = \frac{8!}{(8-5)! \cdot 5!} = 56$ $\binom{4}{2} = \frac{4!}{(4-2)!2!} = 6$

Např. Fotbalové utkání vyhráli domácí poměrem branek 10 : 2. Po prvním poločase byl stav utkání 2 : 1.

Kolika způsoby mohl zápas probíhat?

Řešení: Průběhem zápasu rozumíme pořadí, v jakém střelili góly hosté a domácí. V prvním poločase padly tři góly, z toho domácí vstřelili dva, což lze provést $\binom{3}{2}$ způsoby. V druhém poločase vstřelili domácí osm gólů, hosté jeden, celkem padlo devět gólů. Domácí mohli skórovat $\binom{9}{8}$ způsoby. Z kombinatorického hlediska jsou průběhy poločasů zápasu navzájem nezávislé a celkový počet způsobů průběhu zápasu je dán součinem $\binom{3}{2} \cdot \binom{9}{8} = 27$.

Fotbalové utkání mohlo proběhnout 27 různými způsoby.

Je-li ($0 \leq k \leq n$), pak pro kombinační čísla platí:

$$(1) \binom{n}{1} = n \quad \binom{n}{n} = 1 \quad \binom{n}{0} = 1 \quad \binom{0}{0} = 1 \quad (2) \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad (3) \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Řešení: vytváříme dvouprvkové kombinace ze čtyř možných barev (srdce, piky, kára, kříže).

$C_2(4) = 6$ 1. ♥ 2. ♥ 3. ♥ 4. ♦ 5. ♦ 6. ♠

že se každý prvek může až k -krát opakovat je: $C'_k(n) = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \binom{n+k-1}{k}$

Řešení: Jedná se o kombinace sedmé třídy ze čtyř prvků s opakováním, pro jejichž počet platí:

$$C_7'(4) = \binom{4+7-1}{7} = \binom{10}{7} = 120$$



9.3. BINOMICKÁ VĚTA

zapamatuji si

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

■ Jednotlivé sčítance v tomto **binomickém rozvoji** výrazu $(a + b)^n$ nazýváme členy binomického rozvoje. Pro k -tý člen platí: $A_k = \binom{n}{k-1} a^{n-k+1} \cdot b^{k-1}$. Kombinační čísla $\binom{n}{k}$ se nazývají **binomické koeficienty**. Tyto koeficienty tvoří n -tý řádek **Pascalova trojúhelníku**. (Na základě vlastností kombinačních čísel vyplývá, že každý řádek začíná a končí jedničkou a je symetrický. Každé číslo uvnitř Pascalova trojúhelníku je rovno součtu dvou nejbližších čísel z předchozího řádku):

Figure 1 consists of two diagrams illustrating the construction of the binomial coefficient triangle. The left diagram shows the construction of the triangle for $n=0$ to $n=4$. The right diagram shows the completed triangle for $n=0$ to $n=4$, with the central element 3 highlighted in red and arrows pointing to it from the elements 1 and 2 above it.

Např. a) $(a-b)^4 = \binom{4}{0}a^4 + \binom{4}{1}a^3(-b) + \binom{4}{2}a^2(-b)^2 + \binom{4}{3}a(-b)^3 + \binom{4}{4}b^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$

b) $(\sqrt{3} - i)^5 = \binom{5}{0}\sqrt{3}^5 - \binom{5}{1}\sqrt{3}^4 \cdot i + \binom{5}{2}\sqrt{3}^3 \cdot i^2 - \binom{5}{3}\sqrt{3}^2 \cdot i^3 + \binom{5}{4}\sqrt{3} \cdot i^4 - \binom{5}{5}i^5 =$
 $= 9\sqrt{3} - 5 \cdot 9 \cdot i + 10 \cdot 3 \sqrt{3} \cdot (-1) - 10 \cdot 3 \cdot (-i) + 5\sqrt{3} \cdot 1 - i = -16\sqrt{3} - 16i$

Např. Třetí člen rozvoje $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{x^2}\right)^{10}$, kde $x > 0$ je:

$$A_3 = \binom{10}{3-1} (\sqrt{x})^{10-3+1} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)^{3-1} = \binom{10}{2} (\sqrt{x})^8 \left(-\frac{1}{x^2}\right)^2 = 45 \cdot x^4 \cdot \frac{1}{x^4} = 45$$

9.4. ROVNICE A NEROVNICE S KOMBINAČNÍMI ČÍSLY A FAKTORIÁLY

■ Řešení těchto typů rovnic a nerovnic vychází z definic a vlastností kombinačních čísel a faktoriálů.

Např. Řešte v $\mathbf{N}$ rovnici: $\binom{3}{3} \binom{n}{n-1} = \binom{3}{1} \binom{n}{3}$

Řešení: Rovnice má smysl pro $n \geq 3$.

$$\begin{aligned} \text{Pak } 1 \cdot \binom{n}{n-n+1} &= 3 \cdot \binom{n}{3} \\ \binom{n}{1} &= 3 \cdot \binom{n}{3} \\ n &= 3 \cdot \frac{n!}{(n-3)! 3!} \\ n &= 3 \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)! 3 \cdot 2 \cdot 1} / \cdot 2 \end{aligned}$$

Úpravou:

$$2n - n(n-1)(n-2) = 0$$

$$n[2 - (n-1)(n-2)] = 0$$

$$\text{Odtud: } n^2(n-3) = 0$$

$$(n_1 = 0)$$

$$n_2 = 3$$

$$\mathbf{K = \{3\}}$$



Použité vztahy:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! k!} \wedge n \geq k$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{1} = n$$

$$\binom{n}{n} = 1$$

Např.

Řešte v $\mathbb{N}$ nerovnici: $\binom{4}{1} - \frac{(n-1)!}{(n-2)!} \geq \binom{n-2}{n-4}$

Řešení: Nerovnice má smysl pro $n \geq 4$.

$$\begin{aligned} 4 - \frac{(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} &\geq \binom{n-2}{n-2-n+4} \\ 4 - (n-1) &\geq \binom{n-2}{2} \\ -n + 5 &\geq \frac{(n-2)!}{(n-4)!2!} \\ -n + 5 &\geq \frac{(n-2)(n-3)(n-4)!}{(n-4)!2 \cdot 1} / \cdot 2 \\ -2n + 10 &\geq n^2 - 5n + 6 \\ n^2 - 3n - 4 &\leq 0 \\ (n-4)(n+1) &\leq 0 \end{aligned}$$

Těto nerovnici vyhovují přirozená čísla 1, 2, 3, 4. Vzhledem k podmínce $n \geq 4$ má nerovnice řešení $K = \{4\}$.



Použité vztahy:

$$n! = n \cdot (n-1)(n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$\binom{n}{1} = n$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \wedge n \geq k$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

9.5. ZÁKLADY POČTU PRAVDĚPODOBNOSTI

- **Počet pravděpodobností** se zabývá matematickými zákonitostmi, které se projevují v náhodných pokusech, tj. v činnostech, jejichž výsledek je závislý na náhodě (např. hod hrací kostkou, hod mincí, losování loterie, střelba do terče atd.). Zákonitosti počtu pravděpodobností mají hromadný charakter, tj. platí jen při dostatečně velkém počtu pokusů.
- **Množina všech možných výsledků** náhodného pokusu se značí Ω . Každou její podmnožinu nazýváme **náhodným jevem** a označujeme A, B apod. Vyjadřuje tvrzení o výsledku náhodného pokusu, o kterém lze po provedení pokusu rozhodnout, zda je pravdivé (**jev nastává**), nebo nepravdivé (**jev nenastává**). Celá množina Ω představuje **jev jistý**, prázdná množina **jev nemožný**.

Např.

Při hodu hrací kostkou je $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$. Ta vyjadřuje **jistý jev** „Padne právě jedno z čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6.“ Jev „Padne číslo větší než 6“ je **jevem nemožným**. **Možným náhodným jevem** je např. jev „Padne číslo liché.“, který představuje množinu $A = \{1;3;5\}$.

- Každému jevu A, tj. každému výsledku náhodného pokusu lze přiřadit číslo $P(A)$, zvané **pravděpodobnost jevu A**, pro něž platí $0 \leq P(A) \leq 1$.
- Splňuje-li náhodný pokus tyto předpoklady:
 1. všech možných výsledků je konečný počet,
 2. všechny výsledky jsou stejně možné,
 3. žádné dva výsledky nemohou nastat současně,
 pak lze použít klasickou (Laplaceovu) definici pravděpodobnosti.



zapamatuj si

Klasická definice pravděpodobnosti zavádí pravděpodobnost náhodného jevu $P(A)$ jako poměr počtu m všech výsledků příznivých jevu A k počtu n všech možných výsledků náhodného pokusu: $P(A) = \frac{m}{n}$.

Např. S jakou pravděpodobností padne při hodu kostkou liché číslo?

Řešení: Možné výsledky hodů jsou $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$, tedy $n = 6$. Příznivé výsledky jevu A jsou $A = \{1;3;5\}$,

tedy $m = 3$.

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = 0,5 \quad (50\%)$$

■ Pro náhodné jevy jako množiny zavádíme následující pojmy:

Jev A je částí jevu B ($A \subset B$), jestliže nastane vždy, když nastane jev B .

Např. Při hodu hrací kostkou. Jev B : „Padne 1“ nebo 5.“ je částí jevu A : „Padne liché číslo“.

Jev A je roven jevu B ($A = B$) právě když $A \subset B \wedge B \subset A$.

Např. Při hodu kostkou jsou si rovný jevy A : „Padne sudé prvočíslo.“ a B : „Padne číslo 2.“

Sjednocení jevů A, B je jev $A \cup B$, který nastane právě tehdy, když při realizaci pokusu nastane jev A nebo B .

Např. Při hodu kostkou je sjednocením jevu A : „Padne liché číslo.“ a B : „Padne prvočíslo.“

jev $A \cup B$: „Padne některé z čísel 1, 2, 3, 5.“

Průnik jevů A, B ($A \cap B$) je jev, který nastane, pokud nastane současně jev A i jev B .

Např. Při hodu kostkou je jev A : „Padne číslo menší než 3.“ B : „Padne prvočíslo.“

a jejich průnik $A \cap B$: „Padne číslo 2.“

Opačný (doplňkový) jev k jevu A (A') je takový jev, který nastává právě tehdy, když nenastává jev A .

Např. Při hodu kostkou je jev A' : „Padne číslo 6.“ doplňkovým jevem k jevu A : „Padne jedno z čísel 1, 2, 3, 4, 5.“

Disjunktní (vzájemně neslučitelné) jevy jsou takové, které nemohou nastat zároveň.

Např. Při hodu kostkou jsou jevy A : „Padne sudé číslo.“ a B : „Padne liché číslo.“ navzájem disjunktní.

Vzájemně nezávislé jevy jsou takové, kdy pravděpodobnost realizace jednoho nezávisí na tom, jak proběhne druhý děj.

Např. Při hodu dvěma hracími kostkami nezávisí výsledek hodu na jedné kostce na výsledku hodu na zbývajících kostce.

Věty o pravděpodobnostech:

1. $0 \leq P(A) \leq 1$ pravděpodobnost jistého jevu $P(\Omega) = 1$.

pravděpodobnost nemožného jevu $P(\emptyset) = 0$.

2. Pravděpodobnost, že nastane alespoň jeden z jevů A, B : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Speciálně, pokud se jevy A, B vylučují, tj. jsou disjunktní, pak: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

3. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ pro vzájemně nezávislé jevy.

Např. Určete jaká je pravděpodobnost, že při hodu dvěma kostkami:

- a) padne na první kostce jedno z čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6
- b) padne na druhé kostce číslo 10
- c) na jedné kostce padne jednička, nebo sudé číslo
- d) na obou kostkách padne současně liché číslo

Řešení: a) A: „Na kostce padne jedno z čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6.“ je jev jistý $\Rightarrow P(A) = 1$

b) B: „Na kostce padne číslo 10.“ je jev nemožný $\Rightarrow P(B) = 0$

c) C: „Padne jednička“ D: „Padne sudé číslo.“ $P(C) = \frac{1}{6}$, $P(D) = \frac{1}{2}$

$$\text{Platí } C \cap D = \emptyset \Rightarrow P(C \cup D) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

d) E: „Na první kostce padne liché číslo.“ F: „Na druhé kostce padne liché číslo.“

$$P(E) = \frac{1}{2}, P(F) = \frac{1}{2}, P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

■ Věty o pravděpodobnostech lze zobecnit i pro více jevů.

Např. Určete, jaká je pravděpodobnost, že při hodu šesti kostkami padnou aspoň čtyři jedničky.

Řešení: Jev „padnou aspoň čtyři jedničky“ rozložíme na tři disjunktní jevy:

A: „Padne právě šest jedniček.“

B: „Padne právě pět jedniček.“

C: „Padnou právě čtyři jedničky.“

Pro všechny jevy A, B, C platí, že počet možných výsledků je $n = 6^6$.

Pro jev A je jeden příznivý výsledek (na všech kostkách jednička) $\Rightarrow m = 1$ a $P(A) = \frac{1}{6^6}$.

Pro jev B je 6 · 5 příznivých výsledků (kostku, na které nepadne jednička, můžeme vybrat šesti způsoby a tato kostka může padnout pěti způsoby) $\Rightarrow m = 30$ a $P(B) = \frac{30}{6^6}$.

Pro jev C můžeme vybrat dvě kostky, na kterých nepadne jednička $\binom{6}{2}$ způsoby a na každé z nich může padnout cokoliv vyjma jedničky, tedy

$$m = \binom{6}{2} \cdot 5^2 \text{ a } P(A) = \frac{\binom{6}{2} \cdot 5^2}{6^6}$$

Protože se jevy A, B, C navzájem vylučují, platí:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) = \frac{1}{6^6} + \frac{30}{6^6} + \frac{375}{6^6} = 0,0087$$

Pravděpodobnost, že při hodu šesti kostkami padnou aspoň čtyři jedničky, je 0,0087.

Podmíněná pravděpodobnost jevu A za podmínky, že nastal jev B, je pravděpodobnost jevu A určená za podmínky, že jev B již předem nastal s pravděpodobností $P(B) \neq 0$. Platí:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Pro pravděpodobnost, že nastanou vzájemně závislé jevy A, B s podmíněnými pravděpodobnostmi $P(A/B)$ a $P(B/A)$ platí: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B)$.

Např. Vytáhneme-li z karetní hry, která obsahuje 32 karet (z toho 4 esa) jednu kartu, pak pravděpodobnost, že to bude eso, je $P(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$. Je-li tažená karta eso a vytáhneme-li opět další kartu, pak pravděpodobnost, že je to opět eso, je $P(B/A) = \frac{3}{31}$. Vytáhneme-li z uvedené karetní hry dvě karty po sobě, pak pravděpodobnost, že to budou dvě esa, je $P = P(A) \cdot P(B/A) = \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{31} \doteq 0,012$.

Statistická definice pravděpodobnosti

Nejsou-li splněny všechny podmínky pro použití klasické definice pravděpodobnosti, provedeme hromadné opakování náhodného pokusu. Je-li počet pokusů, ve kterých nastal jev A, roven $n(A)$ (tzv. četnost jevu A) a celkový počet pokusů je $n(p)$, pak $P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(A)}{n(p)}$.

(V praxi se při dostatečně velkém počtu pokusů používá: $P(A) \doteq \frac{n(A)}{n(p)}$).

Např. Z 10 000 kontrolovaných součástek bylo 20 vadných. Přibližná hodnota pravděpodobnosti $P(A)$

jevu A: „Součástka je vadná.“ je podle statistické definice pravděpodobnosti:

$$P(A) \doteq \frac{n(A)}{n(p)} = \frac{20}{10000} = 0,002 \text{ (t.j. 0,2\%)}$$

Bernoulliho schéma

Nechť při n -násobném opakování náhodných pokusů je stále stejná pravděpodobnost $P(A) = p$ jevu A. Pak pravděpodobnost $P_k(A)$, že při n -násobném opakování tohoto pokusu nastane jev právě k -krát je:

$$P_k = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}, \text{ kde } k = 0, 1, 2, \dots, n$$

Např. Jaká je pravděpodobnost, že při opakování 5 hodů hrací kostkou za sebou padne šestka právě třikrát?

Řešení: Protože pravděpodobnost jevu A: „padne šestka“ je stále stejná: $p = \frac{1}{6}$, můžeme dosadit do Bernoulliho schématu $n = 5$, $k = 3$ a dostaneme:

$$P_3(A) = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{5-2} = 10 \cdot \frac{5^3}{6^6} \doteq 0,0268$$

9.6. STATISTIKA

- **Statistický soubor** je konečná neprázdná množina **M** objektů statistického pozorování shromážděných na základě toho, že mají jisté společné vlastnosti. Prvky této množiny jsou nazývány **prvky statistického souboru** (**statistické jednotky**). Počet všech prvků statistického souboru se nazývá **rozsah souboru** n .
- **Statistický znak** x je společná vlastnost prvků statistického souboru, jejíž proměnnost je předmětem statistického zkoumání. Jednotlivé údaje znaku se nazývají **hodnoty znaku** a značí se $x_1, x_2, \dots, x_n$. **Znaky kvantitativní**

tativní mají hodnoty vyjádřeny čísly (např. výška, váha, počet žáků...), **znaky kvalitativní** slovním popisem (např. muž – žena, povolání, národnost ...).

- **Absolutní četnost** hodnoty znaku x_i je číslo, které udává kolikrát se v souboru **M** vyskytuje hodnota znaku x_i . Značí se n_i .
- **Relativní četnost** hodnoty znaku x_i je dána podílem $\frac{n_i}{n}$, kde n_i je absolutní četnost hodnoty znaku x_i , n rozsah souboru **M**. Udává se zpravidla v procentech: $\frac{n_i}{n} \cdot 100\%$.
- **Zpracování statistického souboru** provádíme např. pomocí tabulek a grafů s využitím výpočetní techniky.

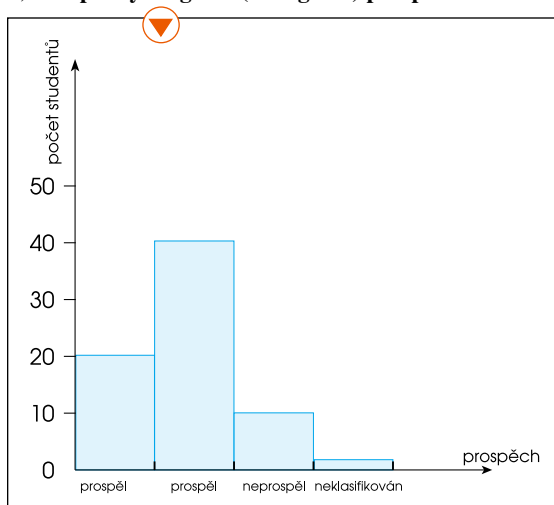
Např. V maturitním ročníku prospělo s vyznamenáním 21 studentů, 42 studentů prospělo, 9 neprospělo a 3 nebyli klasifikováni. Situaci statisticky zpracujte.

Řešení: – statistický soubor ... studenti maturitního ročníku
 – prvek statistického souboru ... student
 – znak (kvalitativní) ... prospěch
 – statistický soubor zpracujeme pomocí tabulky a grafů.

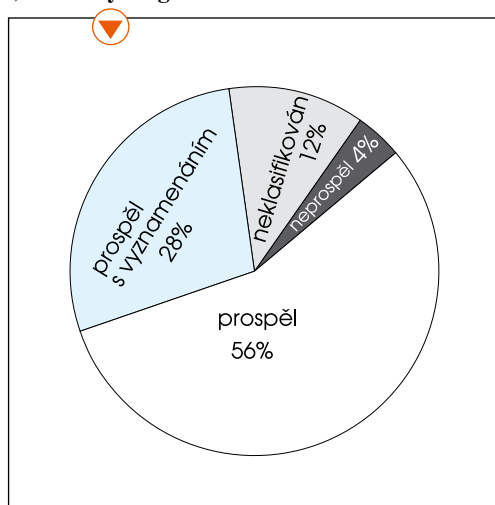
a) Tabulka prospěchu

Prospěch	Prospěl s vyznamenáním	Prospěl	Neprospěl	Neklasifikován	Celkem
četnost absolutní	21	42	9	3	75
četnost relativní (%)	28	56	12	4	100

b) Sloupkový diagram (histogram) prospěchu



c) Kruhový diagram



9.7. CHARAKTERISTIKA STATISTICKÉHO SOUBORU

a) **Charakteristiky polohy** hodnot znaku jsou čísla, která určitým způsobem charakterizují „průměrnou hodnotu“ sledovaného kvantitativního znaku. Patří mezi ně zejména *aritmetický průměr*, *geometrický průměr*, *harmonický průměr*, *medián* a *modus*.

Definice:

Aritmetický průměr $\bar{x}$ hodnot $x_1, x_2, \dots, x_n$ kvantitativního znaku x je dán podílem součtu hodnot znaku

a jejich počtu: $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$



poznámka

1. Mají-li hodnoty x_i četnost n_i , používá se vzorec pro:

$$\text{vážený aritmetický průměr: } \bar{x}' = \frac{x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + \dots + x_k \cdot n_k}{n_1 + n_2 + \dots + n_k} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i \cdot n_i$$

(Např. Jede-li auto 2 hodiny rychlostí 70 km/h a 3 hodiny rychlostí 90 km/h, pak průměrná rychlost není aritmetickým, ale váženým průměrem rychlostí: $v_p = \frac{3 \cdot 90 + 2 \cdot 70}{3 + 2} \text{ km/h} = 82 \text{ km/h}$.)

2. Aritmetický průměr charakterizuje dobře soubor, jehož hodnoty znaku se navzájem extrémně neliší.

Definice:

Geometrický průměr $\bar{x}_G$ hodnot $x_1, x_2, \dots, x_n$ kvantitativního znaku x je: $\bar{x}_G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}$



poznámka

Geometrického průměru se v praxi používá např. k určení průměrného ročního tempa výroby.

Definice:

Harmonický průměr $\bar{x}_H$ hodnot znaku $x_1, x_2, \dots, x_n$ je: $\bar{x}_H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}$

Definice:

Medián $Med(x)$ je prostřední člen mezi hodnotami x_i , jsou-li uspořádány podle velikosti. U souborů, jejichž rozsah n je sudé číslo, se medián rovná aritmetickému průměru prvků s indexy $\frac{n}{2}$ a $\frac{n}{2} + 1$.

poznámka

Medián se užívá se tehdy, jsou-li v souboru prvky s extrémně odlišnými hodnotami znaku.



Modus $Mod(x)$ je nejčastěji se vyskytující hodnota mezi hodnotami x_i , tj. hodnota, která má největší četnost.



poznámka

Užívá se k odhadu střední hodnoty, má-li statistický soubor velký rozsah, nebo když má modus pro soubor specifický význam.

b) Charakteristiky variability (rozptýlení) hodnot znaku ukazují, jak se hodnoty znaků prvků souboru **M** liší od zvolené charakteristiky polohy, resp. od sebe navzájem. Užívají se zejména: *variační rozpětí, průměrná absolutní odchylka, rozptyl, směrodatná odchylka* a *variační koeficient*.

Definice:

Variační rozpětí R je rozdíl největší a nejmenší hodnoty znaku prvků daného souboru **M**: $R = x_{\max} - x_{\min}$.

Definice:

Průměrná absolutní odchylka $\bar{d}$ je aritmetický průměr absolutních hodnot odchylek hodnot znaku všech prvků souboru od aritmetického průměru hodnot znaku: $\bar{d} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|$.

Definice:

Rozptyl s^2 je aritmetický průměr druhých mocnin odchylek hodnot znaku od aritmetického průměru:

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

Definice:

Směrodatná odchylka s je druhá odmocnina z rozptylu: $s = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$.



poznámka

Směrodatná odchylka charakterizuje citlivěji variabilitu hodnot znaku než průměrná absolutní odchylka, neboť zesiluje váhu odchylek pro extrémní hodnoty.

Definice:

Variační koeficient je podíl směrodatné odchylky a aritmetického průměru sledovaného znaku x : $v = \frac{s}{\bar{x}}$.

poznámka

v se vyjadřuje v procentech $v = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100\%$



9.8. KOEFICIENT KORELACE

- V praxi často sledujeme, zda jsou na sobě závislé dva znaky x a y (např. výška a váha osob). Míru závislosti popisuje koeficient korelace.

Definice:

Jsou-li $x_1, x_2, \dots, x_n$ hodnoty znaku x , $y_1, y_2, \dots, y_n$ hodnoty znaku y , pak **koeficient korelace** r znaků x a y je:

$$r = \frac{k}{s_x s_y}, \quad \text{kde } k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}), \quad s_x = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad s_y = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$$


poznámka

Vždy platí $|r| \leq 1$. Čím se tato hodnota blíží víc k 1, tím považujeme závislost x , y za větší.

Např. Určete charakteristiky polohy a charakteristiky variability pro tři soubory, které mají rozsah $n = 10$ a tyto hodnoty znaků x :

- a) 8; 8; 8; 8; 8; 8; 8; 8; 8; 8
- b) 4; 5; 6; 7; 8; 8; 9; 10; 11; 12
- c) 0; 1; 5; 6; 8; 8; 10; 11; 15; 16

Řešení: získané dosazením do definičních vztahů shrnuje tabulka:

	soubor a)	soubor b)	soubor c)
charakteristiky polohy:			
aritmetický průměr	$\bar{x} = 8$	$\bar{x} = 8$	$\bar{x} = 8$
medián	$\text{Med}(x) = 8$	$\text{Med}(x) = 8$	$\text{Med}(x) = 8$
modus	$\text{Mod}(x) = 8$	$\text{Mod}(x) = 8$	$\text{Mod}(x) = 8$
charakteristiky variability:			
průměrná absolutní odchylka:	$\bar{d} = 0$	$\bar{d} = \frac{20}{10} = 2,0$	$\bar{d} = \frac{40}{10} = 4,0$
rozptyl	$s_x^2 = 0$	$s_x^2 = 6$	$s_x^2 = 25,2$
směrodatná odchylka	$s_x = \sqrt{0} = 0$	$s_x = \sqrt{6} \doteq 2,45$	$s_x = \sqrt{25,2} \doteq 5,02$
variační rozpětí	$R = 8 - 8 = 0$	$R = 12 - 4 = 8$	$R = 16 - 0 = 16$
variační koeficient	$v = \frac{0}{8} = 0$	$v = \frac{2,45}{8} \doteq 0,31$	$v = \frac{5,02}{8} \doteq 0,63$

poznámka

Všechny soubory mají shodné charakteristiky polohy, ale navzájem se výrazně liší. V souboru a) jsou hodnoty znaku stejné. Lze ho dobře popsat charakteristikami polohy. Čím více rostou charakteristiky variability (soubory b), c)), tím méně reprezentativní jsou pro tyto soubory charakteristiky polohy hodnot znaku.



Např. Vypočítejte koeficient korelace mezi výškou v_i (v cm) a hmotností m_i (v kg) 10 osob podle údajů uvedených v tabulce.

i	v_i	m_i	$m_i - \bar{m}$	$v_i - \bar{v}$	$(m_i - \bar{m})^2$	$(v_i - \bar{v})^2$	$(m_i - \bar{m})(v_i - \bar{v})$
1	162	60	- 7,4	- 7,6	54,76	57,76	56,24
2	164	65	- 5,4	- 2,6	29,16	6,76	14,04
3	165	68	- 4,4	0,4	19,36	0,16	- 1,76
4	166	66	- 3,4	- 1,6	11,56	2,56	5,44
5	166	68	- 3,4	0,4	11,56	0,16	- 1,36
6	170	66	0,6	- 1,6	0,36	2,56	- 0,96
7	170	70	0,6	2,4	0,36	5,76	1,44
8	175	68	5,6	0,4	31,36	0,16	2,24
9	177	75	7,6	7,4	57,76	54,76	56,24
10	179	70	9,6	2,4	92,16	5,76	23,04
Σ	1694	676	—	—	308,4	136,4	154,6

$$\bar{v} = \frac{1}{10} \cdot \sum v_i = 169,4; \bar{m} = \frac{1}{10} \sum m_i = 67,6; s_1 = \sqrt{\frac{1}{10} \cdot 308,4} \doteq 5,55; s_2 = \sqrt{\frac{1}{10} \cdot 136,4} \doteq 3,69; r = \frac{\frac{1}{10} \cdot 154,6}{5,55 \cdot 3,69} \doteq \mathbf{0,755}$$

Mezi výškou a hmotností je poměrně těsná vazba.

Cvičení 9

- 9.1. Určete počet přirozených čtyřciferných čísel, která lze vytvořit z číslic 1, 2, 3, 4, 5, 6, jestliže
 - a) číslice se nesmějí opakovat,
 - b) číslice se mohou opakovat.
- 9.2. Z kolika prvků lze vytvořit dvacet variací druhé třídy bez opakování?
- 9.3. Kolika způsoby lze postavit do jedné řady patnáct cvičenců?
- 9.4. Kolik rovin je určeno devíti různými body, jestliže žádné čtyři body neleží v téže rovině?
- 9.5. Kolika způsoby se může rozdělit dvanáct rekreatů do dvou volejbalových družstev po šesti hráčích?
- 9.6. Počítač generuje z cifer 0, 2, 4, 6, 7, 8, 9 pětici-ferná čísla s různými ciframi. Jaká je pravděpodobnost, že vygenerované číslo bude sudé?
- 9.7. Zmenší-li se počet prvků o tři, zmenší se počet kombinací druhé třídy bez opakování vytvořených z těchto prvků desetkrát. Určete původní počet prvků.
- 9.8. Řešte rovnice s neznámou $n \in \mathbf{N}_0$:
 - a) $3 + \frac{n!}{(n-2)!} = \frac{(n+2)!}{2!n!}$
 - b) $\binom{n+1}{n-1} = \binom{4}{2} + \binom{6}{4} \binom{n+2}{n+1}$
 - c) $\binom{10}{n} = \binom{45}{1}$

- 9.9. Hokejový trenér má k dispozici třináct útočníků, pět obránců a dva brankáře. Kolika způsoby může na led vyslat sestavu tvořenou třemi útočníky, dvěma obránci a jedním brankářem?
- 9.10. Jaký je aritmetický průměr čísel, která tvoří prvních pět řádků Pascalova trojúhelníku? Jaký je modus tohoto souboru čísel?
- 9.11. Jaká je pravděpodobnost, že při hodu dvěma hracími kostkami současně padne na obou kostkách liché číslo?
- 9.12. Hrany pěti krychlí jsou dlouhé 110 mm, 100 mm, 90 mm, 80 mm a 60 mm. Určete hodnotu mediánu pro povrch těchto krychlí.
- 9.13. Směs koření obsahuje 7 kg koření v ceně 80 Kč/kg a 3 kg v ceně 100 Kč/kg. Kolik stojí jeden kilogram směsi?
- 9.14. Určete $n \in \mathbf{N}$ tak, aby třetí člen binomického rozvoje výrazu $\left(\frac{1}{x} + \sqrt[3]{x}\right)^n$ neobsahoval proměnnou x .

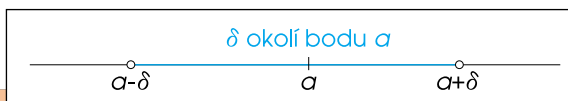
Test 9

- 9.1. Kolik různých lichých čtyřciferných čísel lze sestavit z číslic 2, 4, 6, 7, 8, pokud se nesmí v čísle žádná číslice opakovat?
- 9.2. Pět chlapců se vydalo do kina. Kolika způsoby se mohou posadit do jedné řady, chtějí-li z nich dva bratři vždy sedět vedle sebe?
- 9.3. Z kolika prvků lze vytvořit 5040 variací čtvrté třídy bez opakování?
- 9.4. Kolika způsoby lze srovnat vedle sebe do penálu šest pastelek různých barev?
- 9.5. Kolik trikolór lze ušít z látky barvy bílé, modré, červené a zelené, jestliže se v každé trikolóře může vyskytovat každá barva jen jednou?
- 9.6. Hokejový trenér má k dispozici deset útočníků, pět obránců a dva brankáře. Kolik různých sestav tvořených třemi útočníky, dvěma obránci a jedním brankářem z nich může vytvořit?
- 9.7. Určete $n \in \mathbf{N}$ tak, aby pátý člen binomického rozvoje výrazu $\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 2\right)^n$ neobsahoval proměnnou x .
- 9.8. Jaká je pravděpodobnost, že při tahu Sportky bude ze 49 čísel vylosováno právě 6, která jsme vsadili?
- 9.9. Vypište prvních pět řádků Pascalova trojúhelníku a pak vypočítejte aritmetický průměr z čísel, která tyto řádky tvoří.
- 9.10. Řešte v $\mathbf{N}_0$: $\binom{x-2}{x-4} + \binom{3}{1} = 4 \binom{x}{1}$.

10. Základy diferenciálního a integrálního počtu

10.1. LIMITA FUNKCE, SPOJITOST FUNKCE

- V matematické analýze často používáme pojmu **okolí bodu (čísla) a** . Je to každý otevřený interval, který číslo a obsahuje. Zpravidla pracujeme se **symetrickým okolím bodu a** , tj. s intervalem $(a - \delta; a + \delta)$, kde δ je libovolné kladné číslo. δ - **okolím bodu a** je tedy množina všech $x \in \mathbb{R}$, pro která platí: $x \in (a - \delta; a + \delta)$ resp. $|x - a| < \delta$:



zapamatuj si

Ríkáme, že funkce f má v bodě $a \in \mathbb{R}$, v němž nemusí být definována, **limitu $L \in \mathbb{R}$** , právě když ke každému kladnému číslu ε existuje takové kladné číslo δ , že pro všechna $x \neq a$ z δ -okolí bodu a leží funkční hodnoty $f(x)$ v ε -okolí bodu L . Skutečnost, že má funkce f v bodě a limitu L , zapisujeme: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ (Čteme: limita $f(x)$ pro x jdoucí (blížící se) k a je rovna L .)

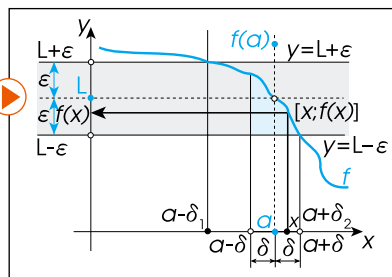


- Symbolicky:** $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: x \in (a - \delta; a + \delta) \wedge x \neq a \Rightarrow f(x) \in (L - \varepsilon; L + \varepsilon)$, nebo jinak:

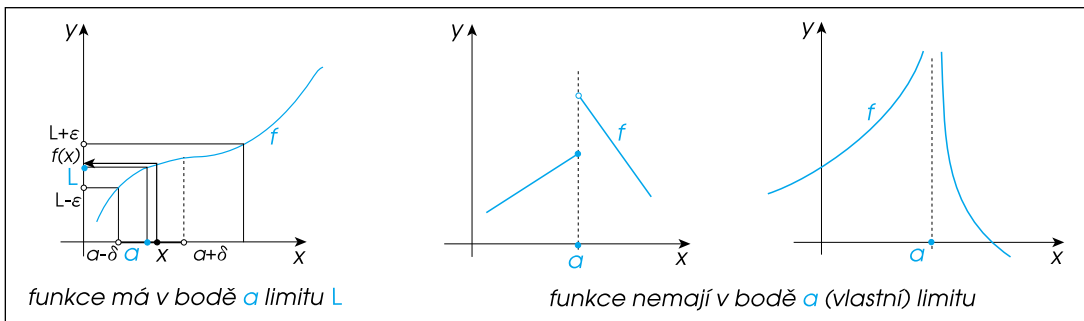
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

- Geometrický význam limity:**

Zvolíme libovolné $\varepsilon > 0$ a sestrojíme pás s hraničními přímkami $y = L + \varepsilon$ a $y = L - \varepsilon$. Pak ať je šířka 2ε tohoto pásu libovolně malá, existuje vždy takové δ -okolí bodu a , že pro každé $x \in D(f)$, $x \neq a$, z tohoto δ -okolí leží příslušný bod $[x; f(x)]$ grafu funkce f uvnitř pásu zvolených rovnoběžek $y = L + \varepsilon$, $y = L - \varepsilon$. Symetrické δ -okolí bodu x dostaneme, zvolíme-li $\delta = \min(\delta_1; \delta_2)$. Nelze-li tuto konstrukci provést, pak funkce nemá v bodě a (vlastní) limitu.



Např.



- Definici užíváme** k odhadům limity funkce v daném bodě a k důkazům vět o limitách.

Pro limity funkcí v bodě platí věty:

- (1) Funkce f má v bodě $a \in \mathbf{R}$ nejvýše jednu limitu.
- (2) Limita konstantní funkce $f(x) = c$ je pro každé $x \in \mathbf{R}$ rovna c .
- (3) Mají-li funkce f, g v bodě a limity, pak mají v tomto bodě limitu i funkce $f + g, f - g, f \cdot g, c \cdot f$ ($c \in \mathbf{R}$ je konstanta) a je-li $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$, pak také funkce $\frac{f}{g}$ má limitu a platí:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [c \cdot f(x)] = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

- (4) Jestliže pro všechna $x \neq a$ z jistého okolí bodu a platí $f(x) = g(x)$ a $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$, potom také funkce $f(x)$ má v bodě a limitu a platí: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$.

Např. Odhadněte $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ a odhad ověřte užitím definice.

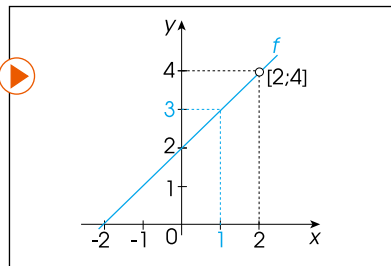
Řešení: Funkce $f: y = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ má $D(f) = \mathbf{R} - \{2\}$.

Pro každé $x \in D(f)$ lze funkci f nahradit funkcí $g: y = x + 2$.

Grafem této funkce je přímka s výjimkou bodu $[2; 4]$.

Pro $x \rightarrow 1$ bude $f(x) \rightarrow 3$, tedy odhadem je $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 3$.

Podle definice limity musí ke každému $\varepsilon > 0$ existovat $\delta > 0$ takové, že pro všechna $x \in D(f)$, pro která je $0 < |x - 1| < \delta$ platí $\left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 3 \right| < \varepsilon$. Odtud pro všechna $x \neq 2$ plyne $|x - 1| < \varepsilon$. Zvolíme-li $\delta = \varepsilon$ je podmínka pro existenci limity splněna, tedy platí: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 3$.



zapamatuj si

Funkce f je v bodě $a \in \mathbf{R}$ spojitá, právě když existuje $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ a platí: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.



- Geometricky spojitost funkce f v bodě $a \in \mathbf{R}$ m. j. znamená, že graf funkce f je v bodě $x = a$ „nepřerušný“, tzn. obsahuje bod $[a; f(a)]$. Lze dokázat, že všechny *elementární funkce* (např. polynommická, logaritmická, exponenciální, mocninná funkce, goniometrické funkce) jsou spojité v bodech, které patří i s příslušným okolím do jejich definičního oboru.

- Platí:
- (1) Je-li funkce f v bodě a spojitá a $f(a)$ je její funkční hodnota v tomto bodě, pak $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.
 - (2) Je-li funkce $u = g(x)$ spojitá v bodě a , tj. $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$ a funkce $y = f(u)$ spojitá v bodě $g(a)$, tj. $\lim_{x \rightarrow a} f(u) = f[g(a)]$, pak existuje $\lim_{x \rightarrow a} f[g(x)]$ a platí: $\lim_{x \rightarrow a} f[g(x)] = f[\lim_{x \rightarrow a} g(x)] = f[g(a)]$.

Např. Vypočítejte: a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - 2x + 3}{x^2 - 2}$

b) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{\cos^5 x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} (2^x - \ln x - 5)$

Řešení: Protože se jedná o funkce v daných bodech spojitě, rovnají se jejich limity hodnotám funkcí v těchto bodech.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - 2x + 3}{x^2 - 2} = \frac{0 - 0 + 3}{0 - 2} = -\frac{3}{2} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{\cos^5 x} = \frac{0 - 0}{-1} = 0$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} (2^x - \ln x - 5) = 2^1 - \ln 1 - 5 = 2 - 0 - 5 = -3$$

Např. Vypočtete: a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 2x - 15}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt{x + 2} - 2}$

c) $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{1 - \operatorname{tg} x}$

Řešení: a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 2x - 15} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x + 3)}{(x - 3)(x + 5)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 3}{x + 5} = \frac{3 + 3}{3 + 5} = \frac{3}{4}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt{x + 2} - 2} \cdot \frac{\sqrt{x + 2} + 2}{\sqrt{x + 2} + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x\sqrt{x + 2} - 2\sqrt{x + 2} + 2x - 4}{x + 2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(\sqrt{x + 2} + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{x + 2} + 2) = 4$

c) $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{1 - \operatorname{tg} x} = \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{1 - \frac{\sin x}{\cos x}} = \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{\frac{\cos x - \sin x}{\cos x}} = \lim_{x \rightarrow \pi/4} (-\cos x) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

10.2. DERIVACE FUNKCE

zapamatuj si

Je-li funkce f definována v okolí bodu x_0 a existuje-li limita $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, potom tuto limitu označujeme $f'(x_0)$ a nazýváme ji derivací funkce f v bodě x_0 .



■ Derivace funkce f v bodě x_0 je tedy číslo $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$,
popř. při označení $x = x_0 + h$ a $x - x_0 = h$: $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

■ K označení derivace funkce v bodě užívá nejen symbol $f'(x_0)$, ale také $y'(x_0)$, popř. $\frac{dy}{dx}$.

■ Geometrický význam derivace funkce v bodě:

Směrnice sečny ST grafu funkce f je $k_s = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Jestliže se bod S

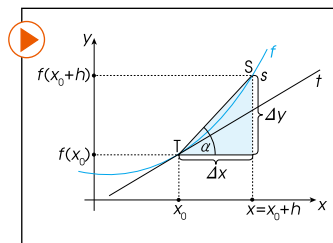
bude přibližovat k bodu T , bude se poloha sečny „blížit“ poloze tečny

v bodě $T[x_0; f(x_0)]$. Pro směrnici tečny dostaneme:

$$k_t = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0).$$

Odtud vyplývá, že pokud v bodě x_0 existuje derivace funkce f , pak tečna ke grafu funkce f v bodě $T[x_0; f(x_0)]$

má rovnici: $y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.



■ K limitě funkce téhož typu dospějeme i při řešení řady fyzikálních úloh. Tímto způsobem zavedl derivaci I. Newton.

Např. Při pohybu hmotného bodu lze vyjádřit závislost dráhy s , kterou hmotný bod urazí jako funkci času t .

Pak **průměrná rychlost** $\bar{v}$ v časovém intervalu $\langle t_0; t_0 + \Delta t \rangle$ je $\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$ a **okamžitá**

rychlost v v čase t_0 je $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$.

- Pokud má funkce f derivaci v každém bodě x jisté množiny $M \subset D(f)$, pak je tato derivace vlastně funkcí proměnné x , což zapisujeme symbolem $y' = f'(x)$. Existuje-li k funkci $y' = f'(x)$ opět derivace, značíme ji $y'' = f''(x)$ a nazýváme **druhou derivací funkce f** . Analogicky lze zavést třetí, čtvrtou a obecně **n -tou derivaci funkce f** . Dosazením x_0 do funkčního předpisu, který vyjadřuje příslušnou derivaci, získáme **hodnotu této derivace v bodě x** .

- V praxi se užívá k označení derivací speciální terminologie.

Např. $v = \frac{ds}{dt}$... první derivace dráhy podle času

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} \text{ ... první derivace rychlosti podle času, druhá derivace dráhy podle času}$$

10.3. VĚTY O DERIVACÍCH FUNKCÍ



zapamatuj si

Na základě definice derivace lze s využitím vět o limitách odvodit vztahy pro derivování funkcí:

Funkce $f: y = f(x)$	Vzorec pro derivaci funkce	Podmínky pro x
$y = \text{konst. (konst.} \in \mathbf{R})$	$y' = 0$	$x \in \mathbf{R}$
$y = x^n, n \in \mathbf{N}$	$y' = n \cdot x^{n-1}$	$x \in \mathbf{R}$
$y = x^k, k \in \mathbf{Z}$	$y' = k \cdot x^{k-1}$	$x \in \mathbf{R} - \{0\}$
$y = y^r, r \in \mathbf{R}$	$y' = r \cdot x^{r-1}$	$x \in \mathbf{R}^+$
$y = a^x, a > 0 \wedge a \neq 1$	$y' = a^x \cdot \ln a$	$x \in \mathbf{R}$
$y = e^x$	$y' = e^x$	$x \in \mathbf{R}$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$	$x \in \mathbf{R}^+$
$y = \log_a x, a > 0 \wedge a \neq 1$	$y' = \frac{1}{x \ln a}$	$x \in \mathbf{R}^+$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$	$x \in \mathbf{R}$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$	$x \in \mathbf{R}$
$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$x \in \mathbf{R} - \{(2k+1)\pi/2\}, k \in \mathbf{Z}$
$y = \operatorname{cotg} x$	$y' = \frac{-1}{\sin^2 x}$	$x \in \mathbf{R} - \{k\pi\}, k \in \mathbf{Z}$

- Analogicky se postupuje při odvození vztahů pro derivace dalších funkcí (viz literatura).

Jestliže mají funkce f, g v bodě x_0 derivaci $f'(x_0), g'(x_0)$, pak mají v tomto bodě derivaci i funkce $f + g, f - g, f \cdot g, c \cdot f$ ($c \in \mathbf{R}$ je konstanta) a pro $g(x_0) \neq 0$ také funkce $\frac{f}{g}$, přičemž platí:

$$(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$$

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

$$(c \cdot f)'(x_0) = c \cdot f'(x_0)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

poznámka

Jestliže funkce $u: u = f(x)$, $v: v = g(x)$ mají v každém bodě $x \in (a, b)$ derivaci u' a v' , pak lze stručně vzorce pro derivování pro $x \in (a, b)$ psát:

$$(u \pm v)' = u' \pm v' \quad (c \cdot v)' = c \cdot v' \quad (uv)' = u'v + uv' \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, v \neq 0$$



■ Užití vět ukazují příklady:

Např. V přípustných bodech určete derivace funkcí daných předpisy:

$$\text{a) } f: y = \sqrt{x}, x > 0 \quad y' = (\sqrt{x})' = (x^{1/2})' = \frac{1}{2} x^{1/2-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\text{b) } f: y = 3x^5 - 6x^2 + 8x$$

$$y' = (3x^5)' - (6x^2)' + (8x)' = 3 \cdot (x^5)' - 6 \cdot (x^2)' + 8 \cdot (x)' = 3 \cdot 5x^4 - 6 \cdot 2x + 8 \cdot 1 = 15x^4 - 12x + 8$$

$$\text{c) } f: y = x \cdot \sin x \quad y' = (x)' \sin x + x \cdot (\sin x)' = 1 \sin x + x \cdot \cos x = \sin x + x \cos x$$

$$\text{d) } f: y = \frac{x^2}{x+1}, x \neq -1 \quad y' = \frac{(x^2)'(x+1) - x^2(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{2x(x+1) - x^2 \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$$

Např. Určete hodnotu první, druhé a třetí derivace funkce $f: y = 4x^5 - 3x^4 + 5x - 8$ v bodě $x_0 = -1$.

$$\text{Řešení: } f': y' = 20x^4 - 12x^3 + 5 \quad y'(-1) = 20 \cdot (-1)^4 - 12 \cdot (-1)^3 + 5 = 37$$

$$f'': y'' = 80x^3 - 36x^2 \quad y''(-1) = 80 \cdot (-1)^3 - 36 \cdot (-1)^2 = -44$$

$$f''': y''' = 240x^2 - 72x \quad y'''(-1) = 240 \cdot (-1)^2 - 72 \cdot (-1) = 312$$



zapamatuj si

Má-li funkce $g: u = g(x)$ v bodě x_0 derivaci $g'(x_0)$ a funkce $f: y = f(u)$ má v bodě $u_0 = g(x_0)$ derivaci $f'(u_0)$, pak složená funkce $F: y = f(g(x))$ má v bodě x_0 derivaci: $F'(x_0) = f'(u_0) \cdot g'(x_0)$.

Např. Určete derivaci funkce v přípustných bodech:

$$\text{a) } f: y = \cos 4x \quad y' = (\cos 4x)' \cdot (4x)' = 4 \cdot (-\sin 4x) = -4 \sin 4x$$

$$\text{b) } f: y = \ln x^2, x \neq 0 \quad y' = (\ln x^2)' \cdot (x^2)' = 2x \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{2}{x}$$

$$\text{c) } y = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \quad y' = [(x^2+1)^{-1/2}]' = -\frac{1}{2} (x^2+1)^{-3/2} \cdot 2x = \frac{-x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$$

$$\text{d) } f: y = e^{2x^3+4x} \quad y' = (e^{2x^3+4x})' \cdot (2x^3+4x)' = (6x^2+4)e^{2x^3+4x} = 2(3x^2+2)e^{2x^3+4}$$

$$\text{e) } f: y = \operatorname{tg}^2 x + x^2 \cdot 3^x \quad y' = 2 \operatorname{tg}^1 x \cdot (\operatorname{tg} x)' + (x^2)' \cdot 3^x + x^2 \cdot (3^x)' = 2 \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} + 2x \cdot 3^x + x^2 \cdot 3^x \cdot \ln 3$$

10.4. PRŮBĚH FUNKCE

■ Metodami matematické analýzy lze určit intervaly, v nichž je funkce rostoucí, resp. klesající a stanovit její extrém. Postačující podmínku ryzí monotónnosti funkce na intervalu udává věta:

Nechť funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a; b \rangle$ a má v každém bodě $x \in (a; b)$ derivaci $f'(x)$.

Pak platí: a) Je-li $f'(x) > 0$ pro každé $x \in (a; b)$, je funkce f **rostoucí** na $\langle a; b \rangle$.

b) Je-li $f'(x) < 0$ pro každé $x \in (a; b)$, je funkce f **klesající** na $\langle a; b \rangle$.

Např. Určete intervaly monotónnosti funkce $f: y = x^3 - 27x + 3$.

Řešení: 1) Funkci zderivujeme: $y' = 3x^2 - 27$.

2) Zjistíme, pro jaká x platí $f'(x) > 0$:

$$3x^2 - 27 > 0 \Leftrightarrow x^2 - 9 > 0 \Leftrightarrow (x + 3)(x - 3) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -3) \cup (3; \infty).$$

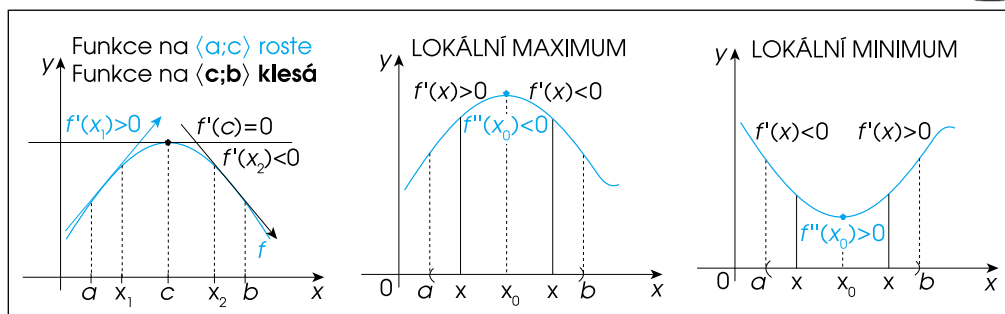
3) Určíme, kdy funkce roste: **Funkce roste pro $x \in (-\infty; -3)$ a také pro $x \in (3; \infty)$.** Vzhledem k tomu, že je spojitá, roste také pro $x \in (-\infty; -3)$ a $(3; \infty)$ (POZOR! Intervaly nelze sjednotit!)

4) Analogicky určíme pro jaká x funkce klesá: $f'(x) < 0$: $3x^2 - 27 < 0 \Leftrightarrow x \in (-3; 3)$.

Vzhledem ke spojitosti klesá také pro $x \in (-3; 3)$.



zapamatuj si



- Důsledkem výše uvedené věty je **nutná podmínka pro lokální extrém** spojité funkce na otevřeném intervalu $(a; b)$: Lokální extrém může nastat jen v těch bodech, kde je tečna rovnoběžná s osou x (tedy $f'(x) = 0$), nebo v bodech, pro které graf funkce tečnu nemá ($f'(x)$ neexistuje). Druh extrému určuje **postačující podmínka existence lokálního extrému**:

Nechť funkce f je v bodě x_0 spojitá a má v okolí x_0 derivaci (příčemž v x_0 derivace existovat může, ale nemusí).

Pak: 1) Funkce f má v x_0 **lokální maximum**, je-li pro $x < x_0$ $f'(x) < 0$ a pro $x > x_0$ $f'(x) > 0$.

2) Funkce f má v x_0 **lokální minimum**, je-li pro $x < x_0$ $f'(x) > 0$ a pro $x > x_0$ $f'(x) < 0$.

3) Jestliže funkce $f'(x)$ nemění v x_0 znaménko, nemá funkce f v x_0 extrém.

Např. Určete lokální extrém y funkce:

a) $f: y = x^2 - 4x + 5$

Řešení: První derivace funkce je $f'(x) = 2x - 4$. Nutná podmínka pro extrém je splněna pro $2x - 4 = 0$. Odtud $x = 2$. Jelikož pro $x < 2$ je $f'(x) < 0$ (funkce klesá) a pro $x > 2$ je $f'(x) > 0$ (funkce roste), mění první derivace v bodě $x = 2$ znaménko a **funkce má v bodě $x = 2$ ostré lokální minimum**.

b) $f: y = x^3 + 2$

Řešení: První derivace funkce je $f'(x) = 3x^2$. Nutná podmínka pro extrém je splněna pro $3x^2 = 0$. Odtud $x = 0$. Jelikož funkce má pro $x < 0$ i pro $x > 0$ stejnou hodnotu, první derivace $f'(x) > 0$, není splněna postačující podmínka pro extrém a **funkce v bodě $x = 0$ extrém nemá**.

- V praxi se často užívá k určení extrému tzv. druhá věta o postačujících podmínkách pro lokální extrém.

Má-li funkce $f(x)$ v bodě x_0 hodnotu derivace $f'(x_0) = 0$ a existuje-li druhá derivace $f''(x_0)$, pak:

1) Je-li $f''(x_0) > 0$, má funkce f v bodě x_0 **lokální minimum**.

2) Je-li $f''(x_0) < 0$, má funkce f v bodě x_0 **lokální maximum**.

3) Je-li $f''(x_0) = 0$, nelze o existenci extrému rozhodnout pomocí druhé derivace.

Např. Určete lokální extrémy funkce $f: y = x^3 + 3x^2 - 9x$.

Řešení: První derivace funkce je $f'(x) = 3x^2 + 6x$. Nutná podmínka pro extrém je splněna pro $3x^2 + 6x = 0$. Odtud $x = 0 \vee x = -2$.

Druhá derivace funkce je $f''(x) = 6x + 6$.

Platí: $f''(0) = 6 \cdot 0 + 6 > 0 \dots$ funkce má v bodě $x = 0$ **lokální minimum**

$f''(-2) = 6 \cdot (-2) + 6 < 0 \dots$ funkce má v bodě $x = -2$ **lokální maximum**

Spojité funkce f má v intervalu $\langle a; b \rangle$ **absolutní (globální) extrém** v bodě x_0 právě tehdy, je-li x_0 bodem, v němž nastává lokální extrém nebo krajním bodem intervalu $\langle a; b \rangle$. Globální extrémy určíme porovnáním hodnot $f(a), f(b)$ a funkčních hodnot $f(x_0)$ v bodech x_0 , ve kterých má funkce lokální extrémy.

- Je-li funkce spojitá v otevřeném intervalu $\langle a; b \rangle$, nemusí mít v tomto intervalu žádný absolutní extrém (např. funkce lineární). Pokud globální extrém této funkce existuje, je to minimální (resp. maximální) hodnota z lokálních extrémů funkce (např. u kvadratické funkce je extrém určen vrcholem paraboly znázorňující graf této funkce).

Např. Určete lokální i globální extrémy funkcí: a) $f_1: y = x^3 - 3x + 1 \wedge x \in \langle 0; 3 \rangle$ b) $f_2: y = x^2 - 8x + 3$

Řešení: a) Určíme funkční hodnoty v krajních bodech intervalu $\langle 0; 3 \rangle$:

$f_1(0) = 0^3 - 3 \cdot 0 + 1 = 1, f_1(3) = 3^3 - 3 \cdot 4 + 1 = 53$. Dále vyhledáme lokální extrém v intervalu $\langle 0; 4 \rangle$: $f_1'(x) = 3x^2 - 3$; $f_1''(x) = 6x$; $f_1'(x) = 3x^2 - 3 = 0$ pro $x_0 = 1$ ($-1 \notin \langle 0; 3 \rangle$). V bodě $x_0 = 1$ nabývá funkce hodnotu $f_1(1) = -1 \wedge f_1''(1) = 6 > 0$, tedy **v bodě $x_0 = 1$ nastává lokální a zároveň globální minimum**. Jelikož platí $f(1) < f(0) < f(3)$, je v krajním bodě $x = 3$ **globální maximum**.

b) Funkce je definována pro každé $x \in \mathbf{R}$. Vyšetříme lokální extrémy:

$f_2'(x) = 2x - 8, f_2''(x) = 2 \wedge f_2'(x) = 2x - 8 = 0$ pro $x_0 = 4$. V tomto bodě je $f_2''(4) = 2 > 0$ a nastává zde **lokální i globální minimum**. **Globální maximum funkce nemá**.

Postup při vyšetřování průběhu funkce ukazuje příklad:

Např. Vyšetřete průběh funkce $f: y = x^4 - 4x^3 + 4x^2$ a načrtněte její graf.

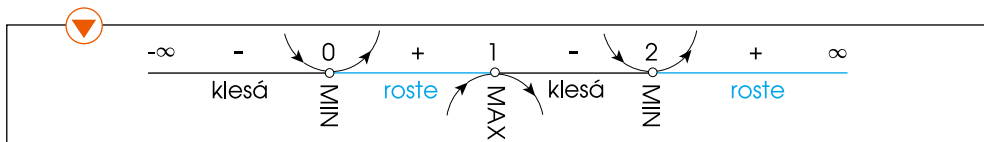
Řešení: ① Určíme definiční obor funkce: $D(f) = \mathbf{R}$.

② Vyšetříme spojitost funkce: Funkce f je spojitá v $\mathbf{R}$.

③ Určíme intervaly monotónnosti a extrémy funkce: $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x$.

Odtud plyne: $4x^3 - 12x^2 + 8x > 0 \dots$ funkce roste

$4x^3 - 12x^2 + 8x < 0 \dots$ funkce klesá



Jiný postup: Nutná podmínka pro extrém $f'(x_0) = 0$ je splněna pro 0; 1; 2. Snadno ověříme postačující podmínku v těchto bodech pomocí druhé derivace funkce $f''(x) = 12x^2 - 24x + 8$.

Tedy: $f''(0) = 8 > 0 \Rightarrow$ **minimum [0; 0]**

$f''(1) = -4 < 0 \Rightarrow$ **maximum [1; 1]**

$f''(2) = 8 > 0 \Rightarrow$ **minimum [2; 0]**

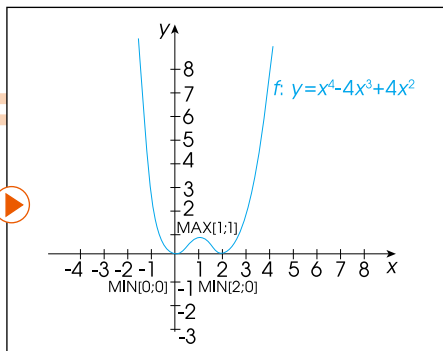
④ Vypočítáme hodnoty funkce ve významných bodech a určíme další vlastnosti funkce:

Průsečíky s osou x ($y = 0$): $x^4 - 4x^3 + 4x^2 = 0 \Rightarrow P_1[0; 0]$ a $P_2[2; 0]$

Průsečíky s osou y ($x = 0$): $y = 0 \Rightarrow P_1[0; 0]$

Funkce není periodická, není sudá (neboť $x^4 - 4x^3 + 4x^2 \neq (-x)^4 - 4(-x)^3 + 4(-x)^2$), není lichá, neboť $x^4 - 4x^3 + 4x^2 \neq -[(-x)^4 - 4(-x)^3 + 4(-x)^2]$, je spojitá v $\mathbf{R}$, je omezená zdola, není omezená shora, není prostá.

⑤ Sestrojíme graf funkce f :



poznámka

- 1) Při podrobnějším studiu vyhledáváme ještě např. asymptoty, inflexní body, limity ve význačných bodech, sudost, lichost, periodičnost funkce atd.
- 2) Grafy funkcí lze snadno získat pomocí počítačových programů.

10.5. UKÁZKY UŽITÍ DIFERENCIÁLNÍHO POČTU

L'Hospitalovo pravidlo

Nechť $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ a $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, nebo $\lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = \infty$.

Existuje-li $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, existuje také $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$

■ L'Hospitalovo pravidlo používáme na výpočet limit typu „ $\frac{0}{0}$ “ nebo „ $\frac{\infty}{\infty}$ “. Postup ukazují příklady:

Např. Vypočítejte pomocí L'Hospitalova pravidla:

- $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 - 9)'}{(x - 3)'} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x}{1} = \frac{2 \cdot 3}{1} = 6$ „ $\frac{0}{0}$ “
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1$ „ $\frac{0}{0}$ “
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x + 1)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-\sin x)'}{(2x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x}{2} = -\frac{1}{2}$ „ $\frac{0}{0}$ “
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = e^0 = 1$ „ $\frac{0}{0}$ “
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 5}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x + 5)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} = 0$ „ $\frac{\infty}{\infty}$ “

Tečna t křivky $y = f(x)$ v bodě $T(x_0, y_0)$ je $t: y - y_0 = k_t(x - x_0)$, kde $k_t = f'(x_0)$.

Např. Napište rovnici tečny a normály ke křivce $f: y = 2x - \ln x$ v bodě $T[1; ?]$.

Řešení: $y(1) = 2 \cdot 1 - \ln 1 = 2$, tedy $T[1; 2]$. Funkční hodnota první derivace v bodě x_0 je rovna směrnici tečny ke grafu příslušné funkce v bodě x_0 :

$$y' = 2 - \frac{1}{x} \Rightarrow y'(1) = 2 - 1 = 1, \text{ proto } k_t = 1 \left(k_n = -\frac{1}{k_t} \Rightarrow k_n = -1 \right)$$

Tečna:

$$t: y - 2 = 1(x - 1)$$

$$x - y + 1 = 0$$

Normála:

$$n: y - 2 = -1(x - 1)$$

$$x + y - 3 = 0$$

Rovnice tečny je $x - y + 1 = 0$, rovnice normály $x + y - 3 = 0$.



poznámka

Jelikož se v aplikacích vyskytují vztahy s více proměnnými, je třeba udat proměnnou, vzhledem ke které se derivace provádí. K tomu se užívají např. zápisy $\frac{ds}{dt}$ (čti: derivace dráhy podle času), $\frac{d^2s}{dt^2}$ (čti: druhá derivace dráhy podle času) atd.

Je-li dána funkční závislost hodnot libovolné fyzikální veličiny na čase, pak její derivace vyjadřuje okamžitou rychlost změny hodnot veličiny.

Např. Hmotný bod koná harmonický pohyb po ose y kolem počátku 0, přičemž okamžitá výchylka z rovnovážné polohy je popsána funkcí času $y(t) = r \sin(\omega t + \varphi)$, kde $r > 0$, $\omega > 0$, $\varphi \in \mathbf{R}$ jsou konstanty.

Pak **okamžitá rychlost** v čase t je popsána funkcí: $v(t) = y'(t) = \frac{dy}{dt} = r\omega \cos(\omega t + \varphi)$

Okamžité zrychlení v čase t určíme derivováním rychlosti podle času (druhou derivací dráhy podle času)

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = y''(t) = \frac{d^2y}{dt^2} = -r\omega^2 \sin(\omega t + \varphi)$$

Např. Těleso koná pohyb, jehož dráha $s(t)$ uražená za čas t od počátečního okamžiku je popsána rovnicí $s(t) = \frac{1}{2}gt^2$, kde g je konstanta (volný pád).

Pak **okamžitá rychlost** tělesa v čase t je: $v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt} = gt$

Okamžité zrychlení v čase t je: $a(t) = s''(t) = \frac{d^2s}{dt^2} = g$

Slovní úlohy na extrémy se zabývají problémy určit absolutní extrém funkce jedné proměnné na určitém intervalu, na kterém je funkce spojitá a má uvnitř celého intervalu derivaci. Postup řešení ukazuje příklad.

Např. Určete rozměry válcové konzervy s objemem V tak, aby se na její výrobu spotřebovalo co nejméně materiálu.

Řešení: ① **Rozbor úlohy a volba proměnné:**

Jedná se o válec s objemem (1) $V = \pi r^2 v$, který má minimální povrch (2) $S = 2\pi r^2 + 2\pi r v$.

② **Vyjádření veličiny, jejíž extrém hledáme jako funkce jedné proměnné a určení extrému:**

Dosazením za $v = \frac{V}{\pi r^2}$ z rovnice (1) do (2) vyjádříme proměnnou S pouze v závislosti na r ($V = \text{konst.}$):

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{V}{\pi r^2} \Rightarrow S = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$$

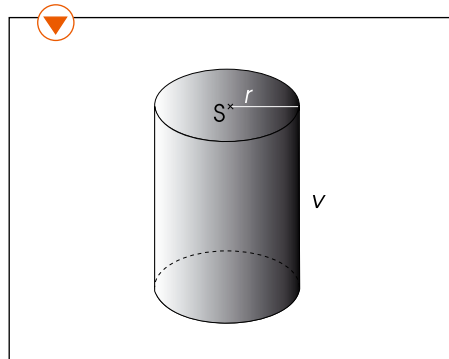
$$\text{Extrém: } S' = \frac{dS}{dr} = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = 0$$

$$\text{Odtud: } r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \quad v = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$$

③ **Ověření extrému:** $S'' = 4\pi + \frac{4V}{r^3} > 0 \Rightarrow \min$

Závěr: Na válcovitou konzervu s objemem V spotřebujeme nejméně materiálu, bude-li mít poloměr podstavu

$$r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \quad \text{a výšku } v = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}.$$



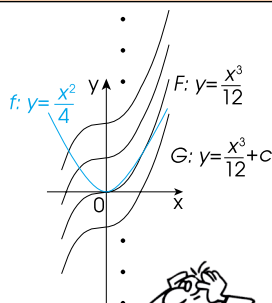
10.6. NEURČITÝ INTEGRÁL

- Při řešení řady fyzikálních, technických i matematických problémů známe derivaci nějaké funkce v otevřeném intervalu a máme tuto funkci najít. Daný problém řeší integrální počet zavedením primitivní funkce a integrálů.

Funkce F se nazývá **primitivní funkcí k funkci f na intervalu $(a; b)$** , jestliže pro každé $x \in (a; b)$ platí: $F'(x) = f(x)$.



- Každé dvě primitivní funkce F, G k funkci f na intervalu $(a; b)$ se liší o reálnou konstantu c : $F(x) = G(x) + c$.
Z toho vyplývá, že k dané funkci f , která má primitivní funkci F , přísluší nekonečně mnoho primitivních funkcí. Jejich grafy jsou křivky, které vzniknou jedna z druhé rovnoběžným posunutím ve směru osy y .



zapamatuj si

Množinu všech primitivních funkcí k dané funkci f nazýváme **neurčitým integrálem funkce f** a zapisujeme: $\int f(x)dx = F(x) + c$, přičemž $F'(x) = f(x)$, $c \in \mathbf{R}$.

Funkce f se nazývá **integrand (integrovaná funkce)**, x **integrační proměnná**, c **integrační konstanta**, $\int$ **integrační znak**.



- Funkce f , k níž existuje primitivní funkce F , se nazývá **integrovatelná**. Každá funkce spojitá v otevřeném intervalu je v tomto intervalu integrovatelná.
- Určení (výpočet) neurčitého integrálu $\int f(x)dx$ nazýváme **integrováním (integrací) funkce f** .
- Na základě definice neurčitého integrálu lze ze vztahů pro derivování odvodit vzorce pro **integraci funkcí**.
Výběr základních integrálů uvádí tabulka:

Vzorec pro neurčitý integrál	Podmínky platnosti vzorce
$\int 0 dx = c$	$x \in (-\infty; \infty)$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$n \in \mathbf{N}, x \in (-\infty; \infty)$
$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c$	$r \in (-\infty; -1) \cup (-1; \infty), x \in (0; \infty)$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$	$x \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$
$\int e^x dx = e^x + c$	$x \in (-\infty; \infty)$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	$a \in (0; 1) \cup (1; \infty), x \in (-\infty; \infty)$
$\int \sin x dx = -\cos x + c$	$x \in (-\infty; \infty)$
$\int \cos x dx = \sin x + c$	$x \in (-\infty; \infty)$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + c$	$x \in \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left((2k-1)\frac{\pi}{2}; (2k+1)\frac{\pi}{2} \right)$ $k \in \mathbf{Z}$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{cotg} x + c$	$x \in \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} (k\pi; (k+1)\pi)$ $k \in \mathbf{Z}$

Např. a) $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c$ b) $\int \frac{1}{x^5} dx = \int x^{-5} dx = \frac{x^{-5+1}}{-5+1} + c = \frac{x^{-4}}{-4} + c = -\frac{1}{4x^4} + c$ c)

■ Pro výpočet integrálů se užívá věta:

Jestliže funkce $f(x)$, $g(x)$ jsou integrovatelné a jsou-li c_1, c_2 libovolné konstanty, pak platí:

$$\int [c_1 f(x) + c_2 g(x)] dx = c_1 \int f(x) dx + c_2 \int g(x) dx$$

■ Z výše uvedené věty vyplývají vztahy pro integraci:

$$\int c f(x) dx = c \int f(x) dx \quad \int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

Např.

a) $\int (3 - \sqrt{x})^2 dx = \int (9 - 6\sqrt{x} + x) dx = \int 9 dx - 6 \int x^{1/2} dx + \int x dx = 9x - 6 \cdot \frac{x^{1/2+1}}{1/2+1} + \frac{x^2}{1+1} + c = 9x - 4x\sqrt{x} + \frac{x^2}{2} + c, x \geq 0$

b) $\int (x - \sin x + 4e^x) dx = \int x dx - \int \sin x dx + 4 \int e^x dx = \frac{x^2}{1+1} - (-\cos x) + 4 \cdot e^x + c = \frac{x^2}{2} + \cos x + 4e^x + c, x \in \mathbb{R}$

c) $\int (2^x + e^x) dx = \int 2^x dx + \int e^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + e^x + c, x \in \mathbb{R}$

d) $\int \frac{3x^4 - 2x^3 + 1}{4x} dx = \int \frac{3x^4}{4x} dx - \int \frac{2x^3}{4x} dx + \int \frac{1}{4x} dx = \frac{3}{4} \int x^3 dx - \frac{1}{2} \int x^2 dx + \frac{1}{4} \int \frac{1}{x} dx$
 $= \frac{3}{4} \cdot \frac{x^4}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4} \ln x + c = \frac{3}{16} x^4 - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{4} \ln |x|, x \in \mathbb{R} - \{0\}$

e) $\int x \cdot (x^3 + x^2 \cdot \sqrt[3]{x}) dx = \int x^4 dx + \int x^3 \cdot x^{1/3} dx = \int x^4 dx + \int x^{10/3} dx = \frac{x^5}{5} + \frac{3x^4 \sqrt[3]{x}}{13} + c, x \geq 0$

■ Vzhledem k náročnosti integračních postupů naznačíme na příkladech jen použití základních integračních metod – **metodu per partes** a **metodu substituční**.

zapamatuj si

Z pravidla pro derivaci součinu vyplývá **integrační metoda per partes** (integrování po částech): Mají-li funkce $u(x)$, $v(x)$ v otevřeném intervalu J spojitě derivace, pak v tomto intervalu platí: $\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int v(x) \cdot u'(x) dx$.



Např. Integraci po částech (**per partes**) určete: a) $\int x^2 \cdot e^x dx$ b) $\int x^3 \cos x dx$ c) $\int x \cdot \ln x dx$

Řešení: Pomůcka: Při integraci metodou per partes integrace per partes u' volíme tak, aby výpočet u (integrace) byl snadný, v tak, aby se výrazy výpočtem v' (derivace) zjednodušovaly např. mocniny klesaly...

$$\int x^2 \cdot e^x dx = e^x \cdot x^2 - 2 \int e^x \cdot x dx = e^x \cdot x^2 - 2 \left[x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x dx \right] = e^x \cdot x^2 - 2 \left[x \cdot e^x - e^x + c \right] =$$

p.p. $u' = e^x \rightarrow u = e^x$ **p.p. $u' = e^x \rightarrow u = e^x$**
 $v = x^2 \rightarrow v' = 2x$ **$v = x \rightarrow v' = 1$**

$$= e^x \cdot x^2 - 2x \cdot e^x + 2e^x - 2c = (x^2 - 2x + 2) \cdot e^x + c_1$$

$$b) \int x^3 \cdot \cos x \, dx = x^3 \cdot \sin x - 3 \int x^2 \cdot \sin x \, dx = x^3 \cdot \sin x - 3 \left[-x^2 \cdot \cos x + 2 \int x \cdot \cos x \, dx \right] =$$

$$\begin{array}{lll} p.p. \, u' = \cos x \rightarrow u = \sin x & p.p. \, u' = \sin x \rightarrow u = -\cos x & p.p. \, u' = \cos x \rightarrow u = \sin x \\ v = x^3 \rightarrow v' = 3x^2 & v = x^2 \rightarrow v' = 2x & v = x \rightarrow v' = 1 \end{array}$$

$$= x^3 \cdot \sin x - 3 \left[-x^2 \cdot \cos x + 2 (x \cdot \sin x - \int \sin x \, dx) \right] = x^3 \cdot \sin x + 3x^2 \cdot \cos x - 6x \cdot \sin x - 6 \cos x + c$$

$$c) \int x \cdot \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + c \wedge x > 0$$

$$\begin{array}{ll} p.p. \, u' = x \rightarrow u = \frac{x^2}{2} & p.p. \, u' = x \rightarrow u = \frac{x^2}{2} \\ v = \ln x \rightarrow v' = \frac{1}{x} & v = \ln x \rightarrow v' = \frac{1}{x} \end{array}$$



zapamatuj si

Substituční metoda pro výpočet integrálů vychází z věty o derivaci složené funkce. Zavedením nové proměnné t převedeme původní integrovanou funkci proměnné x na funkci, jejíž integrace je snazší.

Platí: $\int f[g(x)] \cdot g'(x) \, dx = \int f(t) \, dt$, kde $t = g(x)$

■ Substituční metodu ilustrují následující příklady:

Např. Substituční metodou určete: a) $\int \sin(3x+1) \, dx$ b) $\int \sqrt{2x+1} \, dx$ c) $\int \frac{4x}{1+x^2} \, dx$ d) $\int \cotg x \, dx$

a) **Substitute:** $3x+1=t \Rightarrow 3dx=dt \Rightarrow dx=\frac{dt}{3}$

$$\int \sin(3x+1) \, dx = \int \sin t \frac{dt}{3} = \frac{1}{3} \int \sin t \, dt = -\frac{1}{3} \cos t + c = -\frac{1}{3} \cos(3x+1) + c \wedge x \in \mathbb{R}$$

b) **Substitute:** $2x+1=t \Rightarrow 2dx'=dt \Rightarrow dx=\frac{dt}{2}$

Pak pro $x \in \langle -1/2; \infty \rangle$ platí:

$$\int \sqrt{2x+1} \, dx = \int \sqrt{t} \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int t^{1/2} \, dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot t^{3/2} + c = \frac{1}{3} \sqrt{(2x+1)^3} + c \wedge x \in \langle -1/2; \infty \rangle$$

c) **Substitute:** $1+x^2=t \Rightarrow 2x \, dx = dt \Rightarrow x \, dx = \frac{dt}{2}$

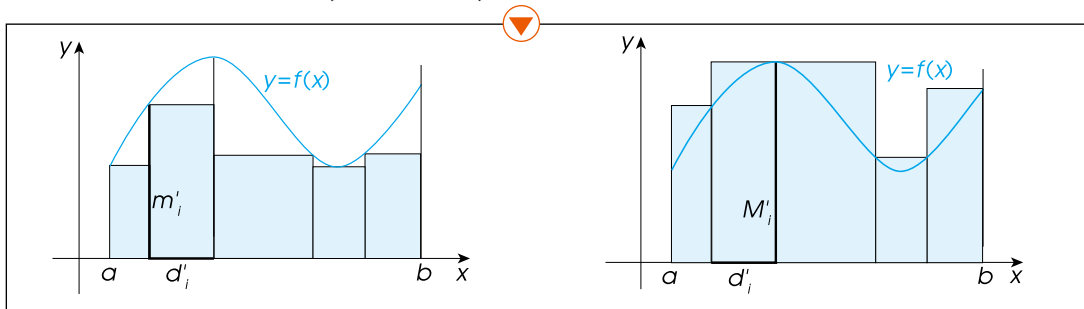
$$\int \frac{4x}{1+x^2} \, dx = 4 \int \frac{1}{t} \frac{dt}{2} = 2 \ln|t| + c = 2 \ln|1+x^2| + c \wedge x \in \mathbb{R}$$

d) **Substitute:** $\sin x = t \Rightarrow \cos x \, dx = dt$

$$\int \cotg x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln|\sin x| + c \wedge x \in \mathbb{R} - \{k\pi\} \wedge k \in \mathbb{Z}$$

10.7. URČITÝ INTEGRÁL

- K zavedení určitého integrálu vedla matematiky myšlenka určit obsah rovinného obrazce jako součet obsahů „nekonečně malých“ obdélníků, na které obrazec rozdělíme.
- Pro jednoduchost předpokládáme, že obrazec je omezen osou x , přímkami $x = a$, $x = b$ a grafem funkce $f(x)$, která je v intervalu $\langle a; b \rangle$ spojitá, nabývá pouze nezáporných hodnot a má na tomto intervalu primitivní funkci $F(x)$. Při výpočtu obsahu obrazce postupujeme takto: Interval $\langle a; b \rangle$ rozdělíme na n intervalů délek $d_1, d_2, \dots, d_n$. Pro každý takovýto interval uvažujeme součin jeho délky d_i s minimem m_i funkce na tomto intervalu a součin jeho délky d_i s maximem M_i na daném intervalu (viz obrázek).



- Pro dané dělení D intervalu $\langle a; b \rangle$ dostaneme *dolní integrální součet* $s_n(f, D) = \sum_{i=1}^n m_i d_i$ a *horní integrální součet* $S_n(f, D) = \sum_{i=1}^n M_i d_i$. Jestliže n jde k nekonečnu a délky všech intervalů jdou k nule, pak oba součty mají tutéž limitu. Její hodnota udává hledaný obsah obrazce a nazývá se **určitý integrál funkce f od a do b** . Zapisujeme: $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(f, D) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f, D)$, a je *dolní mez*, b *horní mez integrálu*, $f(x)$ *integrand* (integrovatelná funkce), $\int$ *integrační znaménko*.

- Pro praktické výpočty se užívá **Newtonův-Leibnizův** vzorec: $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$

Např. a) $\int_0^{\pi/2} \cos x dx = [\sin x]_0^{\pi/2} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1$

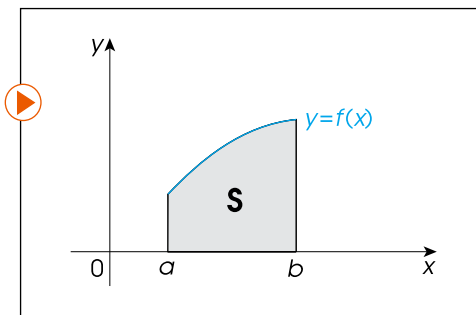
b) $\int_0^2 (x^2 - 1) dx = \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_0^2 = \frac{2^3}{3} - 2 - \frac{0^3}{3} + 0 = \frac{4}{3}$

- Určitý integrál lze zavést i jinými způsoby, rozšířit na funkce, které nejsou spojité atd. Praktické užití určitého integrálu ukazují příklady.

10.8. APLIKACE URČITÉHO INTEGRÁLU

Obsah rovinného obrazce

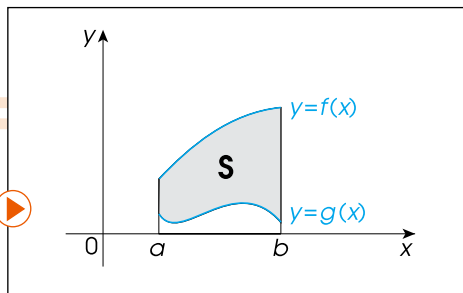
- a) **Obsah křivočarého lichoběžníku** ohraničeného grafem spojitě nezáporné funkce $f(x)$ v intervalu $\langle a; b \rangle$, osou x a přímkami $x = a$, $x = b$ je $S = \int_a^b f(x) dx$.



b) **Obsah obrazce** ohraničeného grafy spojitých funkcí $f(x)$

a $g(x)$ (kde $f(x) \geq g(x) \geq 0$ pro každé $x \in \langle a; b \rangle$)

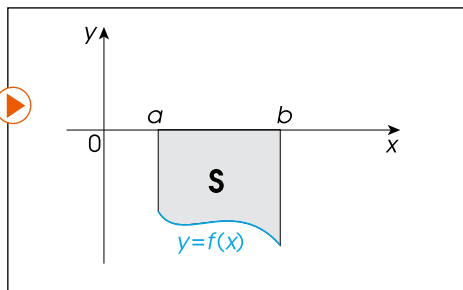
a přímkami $x = a$, $x = b$ (viz obr.) je $S = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$.



c) **Obsah obrazce** ohraničeného grafem spojitě funkce $f(x)$,

která v intervalu $\langle a; b \rangle$ nabývá nekladných hodnot, osou

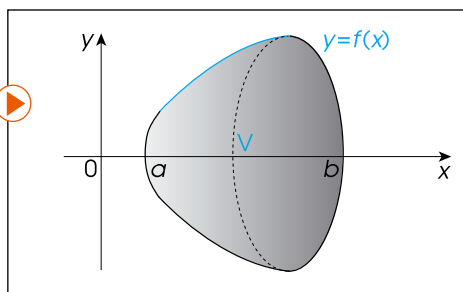
a přímkami $x = a$, $x = b$ je $S = \left| \int_a^b f(x) dx \right| = - \int_a^b f(x) dx$.



Objem rotačního tělesa,

které vznikne rotací křivočarého lichoběžníku kolem osy x

(viz obr.) je $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$.



Obsah pláště tohoto rotačního tělesa

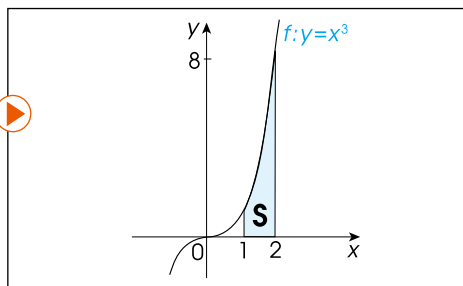
je $Q = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$.

Např. Určete **obsah plochy** ohraničené grafem

funkce $f: y = x^3$, přímkami $x = 1$, $x = 2$ a osou x .

Řešení: Z definice určitého integrálu plyne:

$$S = \int_1^2 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_1^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} = \frac{15}{4}$$



Např. Odvoďte integrálním počtem pro výpočet

objem koule a poloměru r .

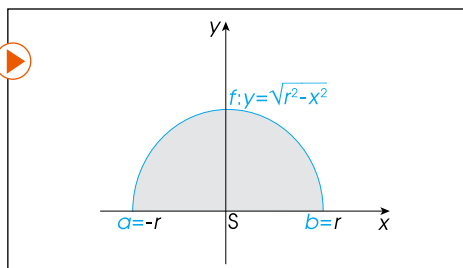
Řešení: Koule vznikne rotací vyšrafovaného polokruhu kolem

osy x . Hraniční polokružnice tohoto útvaru je dána

grafem nezáporné funkce: $f: y = \sqrt{r^2 - x^2}$

Tedy: $V = \pi \int_{-r}^r f^2(x) dx = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx =$

$$= \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^r = \pi \left[r^2 \cdot r - \frac{r^3}{3} - r^2(-r) + \frac{(-r)^3}{3} \right] = \frac{4}{3} \pi r^3$$



Např. Určete **obsah** plochy omezené parabolami

$$y^2 = 9x \quad \text{a} \quad y = x^2 - 4x + 6.$$

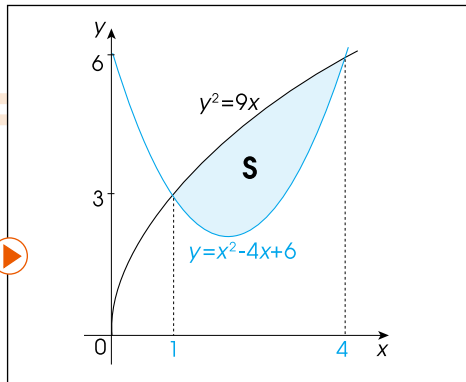
Řešení: Z rovnic parabol dostáváme funkce $f: y = \sqrt{9x}$

a $g: y = x^2 - 4x + 6$. Integrační meze a, b jsou dány

průsečíky těchto křivek. Řešením soustavy rovnic $y^2 = 9x$ a $y = x^2 - 4x + 6$ dostaneme

$a = x_1 = 1$ a $b = x_2 = 4$. Pak plocha omezená parabolami má obsah:

$$S = \int_1^4 (f(x) - g(x)) dx = \int_1^4 (3\sqrt{x} - x^2 + 4x - 6) dx = [2x\sqrt{x} - 1/3 \cdot x^3 + 2x^2 - 6x]_1^4 = 5$$



Např. Odvoďte vztah pro **obsah pláště** rotačního kužele

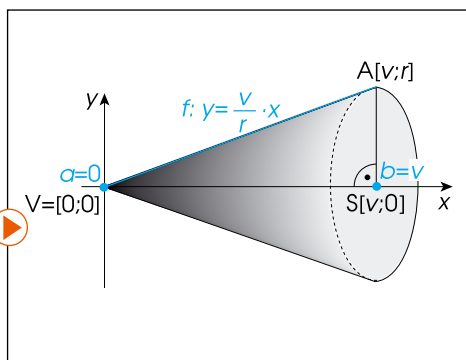
s poloměrem podstavy r a výškou v .

Řešení: Plášť kužele vznikne rotací úsečky AV kolem osy x .

Integrační meze jsou $a = 0$, $b = v$. Funkce f , jejíž graf

určuje rotační kužel, je $f: y = kx + q \Rightarrow f: y = \frac{v}{r}x$.

$$\begin{aligned} \text{Tedy: } Q &= 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx = 2\pi \int_0^v \frac{r}{v} \cdot x \sqrt{1 + \frac{r^2}{v^2}} dx = 2\pi \frac{r}{v} \sqrt{\frac{v^2 + r^2}{v^2}} \cdot \int_0^v x dx = \\ &= \frac{2\pi r}{v^2} \sqrt{v^2 + r^2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^v = \frac{2\pi r}{v^2} \sqrt{v^2 + r^2} \cdot \frac{v^2}{2} = \pi r \sqrt{v^2 + r^2} = \pi r s \end{aligned}$$

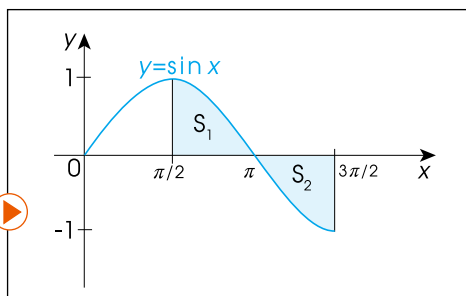


Např. Vypočítejte **obsah plochy** omezené grafem funkce

$f: y = \sin x$, přímkami $x = \pi/2$, $x = 3\pi/2$ a osou x .

Řešení: Plocha má obsah:

$$\begin{aligned} S &= S_1 + S_2 = \int_{\pi/2}^{\pi} \sin x dx - \int_{\pi}^{3\pi/2} \sin x dx = [-\cos x]_{\pi/2}^{\pi} - [-\cos x]_{\pi}^{3\pi/2} = \\ &= -\cos \pi + \cos \pi/2 + \cos 3\pi/2 - \cos \pi = 1 + 0 + 0 + 1 = 2 \end{aligned}$$



Fyzikální aplikace

- a) **Dráha přímočarého pohybu**, jehož rychlost je $v = v(t)$ je pro $t \in \langle t_1; t_2 \rangle$ $s = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$.
- b) **Práce** vykonaná silou $F = F(x)$, která posune těleso po přímé dráze ve směru osy x z bodu a do bodu b je: $A = \int_a^b F(x) dx$.

Např. Určete práci, kterou je třeba vykonat při přemístění tělesa o hmotnosti m z povrchu Země (hmotnost M , poloměr R) do výšky h , považujeme-li gravitační pole Země za homogenní.

Řešení: Podle Newtonova gravitačního zákona působí na těleso v gravitačním poli Země síla $F = \kappa \frac{m \cdot M}{x^2}$, kde κ je gravitační konstanta, x vzdálenost tělesa od středu Země. Při přemísťování tělesa z povrchu Země ($x = R$) do výšky h ($x = R + h$) se vykoná práce:

$$A = \int_R^{R+h} \kappa \frac{m \cdot M}{x^2} dx = \kappa m \cdot M \int_R^{R+h} x^{-2} dx = \kappa m M \left[-\frac{1}{x} \right]_R^{R+h} = \kappa m M \left[-\frac{1}{R+h} - \left(-\frac{1}{R} \right) \right] = \kappa \frac{m M R}{R(R+h)}$$

Cvičení 10

10.1. Vypočítejte:

- a) $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 2x + 1)$
 b) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x+1)^2}{2x+2}$
 c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x + e^x}{2x}$

10.2. Vypočítejte:

- a) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 3x + 2}$
 b) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + x - 12}{2x^2 + 8x}$
 c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sqrt{x+16} - 4}$

10.3. Vypočítejte:

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x}{x}$
 b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{9x^2}$
 c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \sin 2x}{x}$

10.3. Vypočítejte:

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x}{x}$
 b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{9x^2}$
 c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \sin 2x}{x}$

10.4. Vypočítejte:

- a) $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\cos x - \sin x}{\operatorname{tg} x - 1}$
 b) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{2 \sin x \cdot \cos^2 x}{1 + \cos 2x}$
 c) $\lim_{x \rightarrow -\pi/4} \frac{\sin^2 x + \cos^2 x + \operatorname{cotg} x}{\cos x + \sin x}$

10.5. Vypočítejte první derivaci funkce v libovolném bodě jejího definičního oboru:

- a) $f: y = 3x^5 - 4x + 2$
 b) $f: y = 5 \sin x - 2 \cos x$
 c) $f: y = 5x^2 + 4 \cdot e^x$
 d) $f: y = 5 \ln x - 7 \log x$
 e) $f: y = \frac{3}{x} + 1$
 f) $f: y = \operatorname{cotg} x + 3 \operatorname{tg} x$

10.6. Určete hodnotu první derivace funkce f v bodě x_0 :

a) $f: y = x \cdot \cos x \wedge x_0 = \pi$

b) $f: y = \frac{x^2 + 1}{4x} \wedge x_0 = -1$

c) $f: y = \frac{\cos x - 1}{\sin x} \wedge x_0 = \pi$

10.7. Napište rovnici tečny ke grafu funkce

$f: y = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$ v bodě $T[\pi/4; 0]$.

10.8. Určete lokální extrémy funkcí:

a) $f: y = \frac{x^2}{1 - x}$

b) $f: y = \ln(1 - x^2)$

10.9. Užitím derivací určete intervaly, ve kterých je daná funkce rostoucí a ve kterých je klesající.

a) $f: y = x^3 + 3x^2 - 9x$ c) $y = \frac{1}{x} + x$

b) $f: y = \sin x + \cos x$ d) $f: y = e^{-x} \cdot x^2$

10.10. Vypočtěte:

a) $\int \left(\sqrt{x} - \frac{2}{x} + \frac{5}{\sqrt[3]{x^2}} \right) dx$ d) $\int \frac{\ln x}{x} dx$

b) $\frac{3x}{1 - x^2} dx$ e) $\int x \cdot \cos 3x dx$

c) $\int (1 - x)^5 dx$ f) $\int \sin^2 x dx$

10.11. Určete objem tělesa, které vznikne rotací

kuželosečky $y = 1 - \frac{x^2}{2} \wedge x \in \langle -1; 1 \rangle$ kolem osy x .

Test 10

10.1. Vypočtěte: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1}{4x^2}$

10.2. Vypočtěte: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^4 - 1}$

10.3. Vypočtěte: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - x^2}{\sqrt{2x} - 2}$

10.4. Vypočtěte $f'(-1)$, je-li $f: y = \frac{x^2}{(x - 2)^2}$

10.5. Napište rovnici tečny ke grafu funkce

$f: y = \frac{2x - 1}{1 + x}$ v bodě $T[-2; y_0]$

10.6. Určete hodnotu druhé derivace funkce

$f: y = 4 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$ v bodě $x_0 = \pi/4$

10.7. Určete lokální extrémy funkce $f: y = \frac{1}{x} \cdot \ln x$

10.8. Číslo 16 rozložte na dva sčítance tak, aby jejich součin byl maximální.

10.9. Vypočtěte: $\int_{\pi/4}^{\pi/2} 4 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} dx$

10.10. Určete obsah plochy omezené grafy funkcí

$f: y = x^2$ a $g: y = -x$

Cvičení 1

- 1.1. a) $\neg A$: Nesvítí slunce. (Není pravda, že svítí slunce.)
 b) $\neg B$: Existuje alespoň jeden žák, který není pilný. (Aspoň jeden žák není pilný.)
 c) $\neg C$: Platí nejvýše jedno, nebo aspoň tři tvrzení.
 d) $\neg D$: Existuje aspoň jedno sudé prvočíslo.
 e) $\neg E$: Neexistuje pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník.
- 1.2. a) Všechna přirozená čísla jsou nezáporná.
 b) Pro každé celé číslo platí: Je-li toto číslo sudé, pak je sudá i jeho druhá mocnina.
 c) Existuje reálné číslo x , pro které je hodnota $\cos x$ rovna jedné.
 d) Existuje komplexní číslo x , pro které platí $x^2 + 1 = 0$.
- 1.3. Věta: Je-li trojúhelník rovnostranný, pak je také rovnoramenný ... **platí**
 Věta obrácená: Je-li trojúhelník rovnoramenný, pak je také rovnostranný ... **neplatí**
 Věta obměněná: Není-li trojúhelník rovnoramenný, pak není rovnostranný ... **platí**
 Věta negovaná: Trojúhelník je rovnoramenný a není rovnostranný ... **neplatí**
- 1.4. a) *Přímý důkaz*: Podle předpokladu věty je n číslo liché, tzn., že platí $n = 2k + 1$, kde $k \in N_0$.
 Odtud $n^4 - 1 = (n^2 + 1)(n^2 - 1) = (4k^2 + 4k + 2)(4k^2 + 4k)$.
 Po úpravě $n^4 - 1 = 2(2k^2 + 2k + 1) \cdot 4k(k + 1)$. Odtud $n^4 - 1 = 8(2k^2 + 2k + 1)(k + 1)k$.
 Jelikož jedno z čísel $(k + 1)$, k je jistě sudé, je součin $8(2k^2 + 2k + 1)(k + 1)k$ dělitelný 8 i 2, tedy 16.
 Odtud plyne platnost dokazovaného tvrzení.
 b) *Nepřímý důkaz*: Ekvivalentní obměněnou větu $\forall n \in N: 8|n \Rightarrow 2|n^3$ dokážeme přímým důkazem
 $8|n \Rightarrow \exists k \in N: n = 8k \Rightarrow n^3 = (8k)^3 \Rightarrow n^3 = 512k^3 \Rightarrow n^3 = 2 \cdot 256 \cdot k^3 \Rightarrow 2|n^3$ c. b. d.
 c) *Důkaz sporem*: Předpokládáme platnost negace: $\exists n \in N: 2|n \wedge 2 \nmid n^3$. Pomocí řetězce implikací dospějeme ke sporu:
 $2|n \Rightarrow \exists k \in N: n = 2k \Rightarrow n^3 = 8k^3 = 2 \cdot 4k^3 \Rightarrow 2|n^3$ (SPOR) Negace vždy neplatí, proto platí věta původní.
- 1.5. a) **I. krok**: Pro $k = 1$ věta platí, neboť $L(1) = 1$

$$\left. \begin{array}{l} L(1) = 1 \\ P(1) = 1^2 = 1 \end{array} \right\} L = P$$

II. krok: Existuje aspoň jedno takové $k \in N$, že platí $1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2$
 Máme ověřit, zda platí $1 + 3 + 5 + \dots + (2k + 1) \stackrel{?}{=} [2(k + 1) - 1] = (k + 1)^2$
 Upravíme levou stranu a porovnáme se stranou pravou:

$$\left. \begin{array}{l} L = 1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + 2k + 1 = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2 \\ P = (k + 1)^2 \end{array} \right\} L = P$$

 Závěr: Platí: $\forall n \in N: 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$.
- b) **I. krok**: Pro $k = 1$ věta platí, neboť $L(1) = \frac{1^2}{1 \cdot 3} = \frac{1}{3}$

$$\left. \begin{array}{l} L(1) = \frac{1^2}{1 \cdot 3} = \frac{1}{3} \\ P(1) = \frac{1 \cdot (1 + 1)}{2 \cdot (2 \cdot 1 + 1)} = \frac{2}{2 \cdot 3} = \frac{1}{3} \end{array} \right\} L = P$$

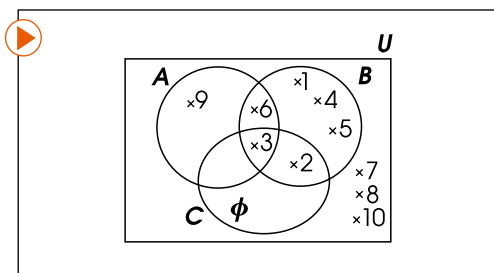
II. krok: Existuje aspoň jedno takové $k \in N$, že platí $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{4}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{k^2}{(2k - 1)(2k + 1)} = \frac{k(k + 1)}{2(k + 1)}$.
 Máme ověřit, zda platí:

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{4}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{k^2}{(2k - 1)(2k + 1)} = \frac{k(k + 1)^2}{[2(2k - 1)][2(2k + 1)]} \stackrel{?}{=} \frac{(k + 1)[(k + 1) + 1]}{2[2(k + 1) + 1]}$$

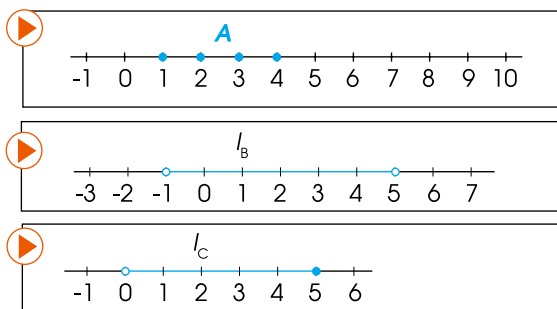
$$\left. \begin{array}{l} L = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{4}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{k^2}{(2k - 1)(2k + 1)} + \frac{(k + 1)^2}{[2k + 1][2k + 3]} = \frac{k(k + 1)}{2(2k + 1)} + \frac{(k + 1)^2}{(2k + 1)(2k + 3)} = \frac{k(k + 1)(2k + 3) + 2(k + 1)^2}{2(2k + 1)(2k + 3)} = \\ = \frac{(k + 1)[k(2k + 3) + 2(k + 1)]}{2(2k + 1)(2k + 3)} = \frac{(k + 1)(k + 2)(2k + 1)}{2(2k + 1)(2k + 3)} = \frac{(k + 1)(k + 2)}{2(2k + 3)} \\ P = \frac{(k + 1)[(k + 1) + 1]}{2[2(k + 1) + 1]} = \frac{(k + 1)(k + 2)}{2(2k + 3)} \end{array} \right\} L = P$$

 Závěr: Platí $\forall n \in N: \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{4}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{n^2}{(2n - 1)(2n + 1)} = \frac{n(n + 1)}{2(2n + 2)}$.

- 1.6. $U = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$
 $A = \{3; 6; 9\}$
 $B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
 $C = \{2; 3\}$
 $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 9\}$
 $A \cap B = \{3; 6\}$
 $A \cap B \cap C = \{3\}$
 $A'_U = \{1; 2; 4; 5; 6; 7; 8; 10\}$
 $B - A = \{1; 2; 4; 5\}$



- 1.7. Jedná se o de Morganova pravidla, která platí.
- 1.8. Odznaky sbírá 12 sběratelů, pohlednice 9, jen známky 6 a 14 nesbírá ani známky, ani pohlednice.
- 1.9. a) nelze zapsat intervalem



$$I_B = (-1; 5)$$

$$I_C = (0; 5)$$

Test 1

- 1.1. d
 1.2. e
 1.3. b, d
 1.4. c
 1.5. c
 1.6. $\forall n \in \mathbb{N}: 2|n^2 \Rightarrow 2|n$
 1.7. c
 1.8. d
 $U = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}; A = \{2; 4\}; A'_U = \{1; 3; 5; 6; 7; 8\}$
 1.9. 20
 1.10. d, e, f



Použijeme nepřímý důkaz. Obměna věty: $\forall n \in \mathbb{N}: 2|n \Rightarrow 2|n^2$.

Důkaz obměny: $2|n \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}: n = 2k \Rightarrow n^2 = (2k)^2 \Rightarrow n^2 = 4k^2 \Rightarrow n^2 = \frac{(2k)^2}{k^2} \Rightarrow n^2 = 2k^* \Rightarrow 2|n^2$ c. b. d.

Protože platí věta obměněná, platí i věta původní.

Cvičení 2

- 2.1. a) $(568)_{10} = 5 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 = 568$
 b) $(1101)_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 11$
 c) $(A5)_{16} = 10 \cdot 16^1 + 5 \cdot 16^0 = 165$
 2.2. a) MMDLXXIX
 b) MDXXIV
 c) MMMMCLXIII
 2.3. a) $D(15; 35) = 5$
 b) $D(150; 200) = 50$
 c) $D(284; 524) = 4$
 2.4. a) $n(15; 20) = 60$
 b) $n(8; 60) = 120$
 c) $n(12; 280) = 840$
 2.5. a) $\frac{21}{20} = 1 \frac{1}{20}$
 b) $\frac{24}{23} = 1 \frac{1}{23}$
 2.6. a) $0,\overline{6} \doteq 0,67$
 b) $5,\overline{83} \doteq 5,80$
 c) $10,\overline{90} \doteq 10,91$

2.7. a) $a = \frac{5\sqrt{2}}{2} + i\frac{5\sqrt{2}}{2}$ b) $b = -\sqrt{2}i$

2.8. a) $a = 5(\cos \pi/4 + i \sin \pi/4)$
b) $b = 1 \cdot (\cos 7\pi/4 + i \sin 7\pi/4)$

2.9. a) $5 + 3i$ b) $1 + 5i$
c) $10 + 5i$ d) $\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$

2.10. $(1+i)^5 = [\sqrt{2}(\cos \pi/4 + i \sin \pi/4)]^5 =$
 $= 2\sqrt{2}(\cos 5\pi/4 + i \sin 5\pi/4) =$
 $= 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -2 - 2i$

Test 2

2.1. **MMCMCLXXIX**
2.2. d
2.3. **D(455; 364) = 91** **n(455; 364) = 1820**
2.4. a
2.5. $\frac{17}{6} = 2, 8\bar{3} \approx 2,83$

2.6. $(1011)_2 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 =$
 $= 8 + 2 + 1 = (11)_{10}$
2.7. c
2.8. $\frac{7}{6} = 1\frac{1}{6}$
2.9. c
2.10. a, d

Cvičení 3

3.1 a) **360** b) **2** c) 1 d) **81**
3.2 a) $\frac{4}{3}$ b) **4** c) **0,02** d) $\frac{3}{5}$
3.3 a) $\sqrt[4]{7}$ b) $\sqrt[4]{27}$ c) $\sqrt[4]{5}$ d) 2
3.4 a) $3\sqrt{2}$ b) $-1 + \sqrt{3}$ c) **2** d) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$
3.5 a) $3x^2yz$ b) $\frac{81x^5z^3}{32y^3}$ c) $\frac{25x^2}{y^2}$ d) **x**
3.6 a) $(x-7)(x+11)$ b) $(2x-1)(2x-3)$
c) $x(x+7)(x-6)$ d) $x(x-3)(x+3)(x-3i)(x+3i)$
3.7 a) **x** b) $\frac{\sqrt{x}}{x+y}$
3.8 a) **K = {2}** b) **K = {1}** c) **K ≠ ∅**
3.9 a) **K = {0; 4}** b) **K = {-25; 25}**
c) **K = {-6; 2}** d) **K = {2; -4}**

3.10 **p ∈ (0; 1) ∪ (1; 8/7)**
3.11 a) **K = ∅** b) **K = {3}** c) **K = {18}**
3.12 a) **K = {-1; 5}** b) **K = {1; 2}** c) **K = (-7; 1)**
3.13 a) **K = {[0; -1]}** b) **K = {[2; -1; -2]}** c) **K = {[6; 8]}**
3.14 a) **K = {-i; i; -1; 1}** b) **K = {3/2 + 1/2 i}**
3.15 a) **K = {-1; 2; 1/2}** b) **K = {-3/2; -2/3; 1/2; 2}**
3.16 a) **K = (-∞; 1)** b) **K = (-5; 2)** c) **K = (-5; 2)**
3.17 a) **K = ∅** b) **K = (5; ∞)** c) **K = (0; 2)**

Test 3

3.1 **27**
3.2 **1,5**
3.3 c
3.4 c
3.5 **(x-2)(x+8)**
3.6 **K = {-3}**
3.7 **K = {-2i; 2i; -2; 2}**
3.8 **K = (-∞; -1)**
3.9 **K = {1; 3}**
3.10 **p ∈ {2; 4}**

Cvičení 4

4.1 a) **f: O = 4 · a ∧ a > 0**
b) **f: S = a^2 ∧ a > 0**
c) **f: r = a/2 · √2 ∧ a > 0**
4.2 a) **D(f) = (-2; 1,5), H(f) = {1,5},**
není sudá ani lichá, je omezená
b) **D(f) = (-1; 1,5), H(f) = (-2; 2),**
není sudá ani lichá, je omezená
c) nejedná se o funkci
4.3 a) **(0; ∞)** b) **(1; 2) ∪ (2; ∞)** c) **R - {kπ} ∧ k ∈ Z**
4.4 **f: y = 3x^2 - 5x + 2, x_min = 5/6**
4.5 a) **f^-1: y = x/3 - 1/3, D(f^-1) = (-2; 16), H(f^-1) = (-1; 5)**
b) **f^-1: y = ex + 2, D(f^-1) = (0; ∞), H(f^-1) = (2; ∞)**
4.6 **S(U) = ∫_0^1 (√x - x^2) dx = 1/3 j^2**
4.7 **Grafem je rovnoosá hyperbola se středem S [-2; -1].**

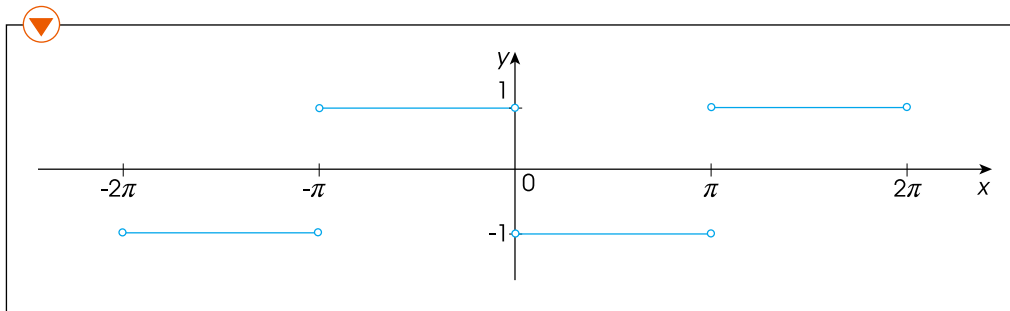
- 4.8 a) $a \in (0;1)$ b) $a \in (0;1)$ c) $a \in (-\infty; 1)$
 4.9 a) $K = \{5/2\}$ b) $K = \{1\}$ c) substitute $9x = y$, $K = \{-3/2; 3/2\}$
 4.10 a) $x \in (-1; \infty)$ $K = \{99\}$ b) $K = \emptyset$ c) $K = \{-2\}$

Test 4

- 4.1 $f: r = a/2 \wedge a > 0$
 4.2 $f: y = \frac{6x+17}{7} \wedge (-4;3)$, $D(f) = \langle -4;5$, $H(f) = \langle -1;3$
 4.3 a, c, d, e
 4.4 b, c
 4.5 $x \in (-1;0) \cup (1; \infty)$
 4.6 b
 4.7 $a \in (0;1)$
 4.8 $[-2;4]$
 4.9 $D(f) = (-2; \infty)$
 4.10 $x = 3$

Cvičení 5

- 5.1 $45^\circ; 300^\circ; 126^\circ; 132^\circ; 390^\circ$
 5.2 $180^\circ; 57^\circ 17' 44,81''; 286^\circ 28' 44''; 5729^\circ 34' 40''; 81^\circ 1' 42,49''$
 5.3 $\pi/5; 7\pi/12; 13\pi/15; 7\pi/4$
 5.4 $\sin \alpha = \cos \beta = \frac{3}{5}$; $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} \beta = \frac{3}{4}$
 $\sin \beta = \cos \alpha = \frac{4}{5}$; $\operatorname{tg} \beta = \operatorname{ctg} \alpha = \frac{4}{3}$
 5.5 $\omega = 37^\circ 58' 48''$
 5.6



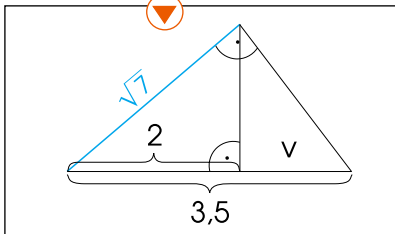
- 5.7 Vztahy platí.
 5.8 a) $\pi/6; 5\pi/6; 7\pi/6; 11\pi/6$
 b) $3\pi/4; 7\pi/4$
 c) $\pi/4; 3\pi/4; 5\pi/4; 7\pi/4$
 5.9 a) $K = \{2\pi/3; 4\pi/3\}$
 b) $K = \{2\pi/3; 4\pi/3\}$
 5.10 a) $K = \{k \cdot \pi \wedge k \in \mathbb{Z}\}$
 b) $K = \{\pi/3 + k\pi; \frac{2\pi}{3} + k\pi \wedge k \in \mathbb{Z}\}$
 5.11 a) $K = \{k\pi; \pi/4 + 2k\pi; 3\pi/4 + 2k\pi; 5\pi/4 + 2k\pi; 7\pi/4 + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$
 b) $K = \{k \cdot \pi/2; \pi/12 + k\pi; 5\pi/12 + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$
 c) $K = \{\pi/4 + k\pi; \pi + k \cdot \pi; k \in \mathbb{Z}\}$
 d) $K = \{\pi/4 + k\pi; \pi + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$
 5.12 $\alpha = 53^\circ 10'$; $\beta = 59^\circ 30'$; $\gamma = 67^\circ 20'$; $S = 84 \text{ cm}^2$

Test 5

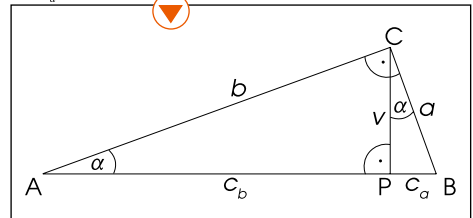
- 5.1 b, c
 5.2 a, c, d
 5.3 b, d
 5.4 b
 5.5 c
 5.6 a
 5.7 b
 5.8 $x = \pi/4 + k\pi/2 \wedge k \in \mathbb{Z}$
 5.9 $x \in (0; \pi/6)$ Pozor! Pro $x = 0$ není funkce kotangens definována.
 5.10 $F_1 = F_g \cdot \sin \alpha$, $F_2 = F_g \cdot \cos \alpha$

Cvičení 6

- 6.1 $45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$
 6.2 60°
 6.3 1. $\triangle APS_a$; P je pata výšky z A na c , $|AS_a| = t_a$,
 $|AP| = v_a$, $\angle APS_a = 90^\circ$
 2. $T; T \in AS_a \wedge |AT| = 2/3 t_a$
 3. $k; k \equiv (T; r; r = 2/3 t_a)$
 4. $A; A \in \odot S_a T \cap k$
 5. $C; C \in \odot S_a P \wedge |S_a B| = |S_a C|$
 6. $\triangle ABC$
 6.4 Např. $\sqrt{7} = \sqrt{2 \cdot 3,5}$



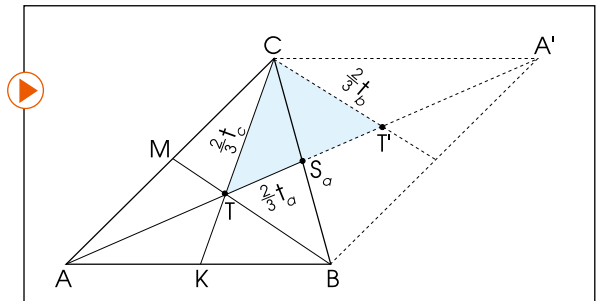
- 6.5 $a/2$
 6.6 90°
 6.7 $\frac{c_b}{v} = \frac{v}{c_a} \Rightarrow ca \cdot cb = v^2$



- 6.8 o 44 %
 6.9 $6 : \pi$
 6.10 asi 1592 km
 6.11 $25 \cdot \sqrt{2}$ m
 6.12 Konstrukce vychází z podobnosti (stejnolehlosti)
 $e = 3\sqrt{10}$ cm, $f = \sqrt{10}$ cm
 6.13 $d = 7,5$ cm
 6.14 $V = \frac{3a^3}{8}$

Test 6

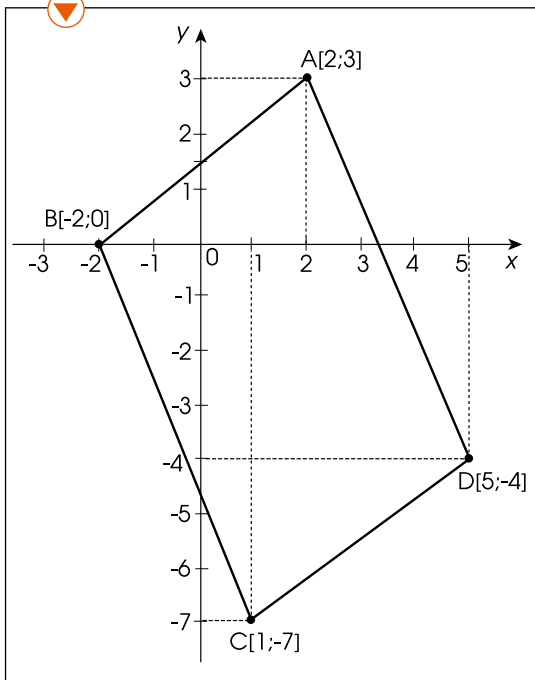
- 6.1 $30^\circ, 45^\circ, 105^\circ$
 6.2 $t_c = c/2 \Rightarrow c = 5$ cm,
 $\alpha = 90^\circ - \beta = 30^\circ$,
 $a = c \cdot \sin \alpha \Rightarrow a = 2,5$ cm
 6.3 např. $\sqrt{5} = \sqrt{5 \cdot 1}$
 6.4 $t = \frac{a}{2} \sqrt{3}$
 6.5 Přímky jsou různoběžné (protínají se ve středu krychle).
 6.6 48
 6.7 60°
 6.8 $12 : 2\pi : 3\pi$
 6.9 Řešení vychází ze středové souměrnosti:
 6.10 54π cm²



Cvičení 7

- 7.1 a) $\vec{u} = (-5; 3)$; b) $\vec{v} = (1; 4)$; c) $\vec{w} = (-4; 7)$;
 d) $\vec{s} = (-13; -6)$; e) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 7$
 7.2 $\vec{u} \times \vec{v} = (-4; 2; 2)$

7.3



7.4 a) $P[-7/4; 5/4]$ $r: 6x - 2y + 13 = 0$

7.5 $4j$

7.6 mimoběžky (průsečík neexistuje)

7.7 $A[0; -3], B[-3; 3], C[3; 0]$

$k \equiv x^2 + y^2 + x - y - 12 = 0$

7.8 $4x^2 + 25y^2 - 40x + 100y + 100 = 0$

7.9 $S[-3; 4], V[-2; 3], |SV| = \sqrt{2}j$

7.10 $T_1[5; 3], T_2[5; -3]$

$t_a \equiv 5x - 3y - 16 = 0$

$t_b \equiv 3x - 10y + 15 = 0$

$\alpha = 42^\circ 20' 12''$

7.11 $q = -4 \vee q = 2$

7.12 $S[0; 0; 0]$ $r = \sqrt{14}j$

$\chi: x^2 + y^2 + z^2 = 14$

$\tau: x + 2y + 3z - 14 = 0$

Test 7

7.1 d

7.2 a, d

7.3 a, d

7.4 $x^2 + y^2 - 2 = 0$

7.5 a, c, e,

7.6 b, c

7.7 $a = b = 9$

7.8 $S_2[0; 2]; S_1[0; 0]; |S_1 S_2| = 2j$

7.9 Bod T je vrcholem paraboly $t: y = -2$ je vrcholová tečna.

7.10 $S[2; 1], c, d$

Cvičení 88.1 $\{1; 3; 5; 7; 9 \dots\}$ nekonečná rostoucí aritmetická posloupnost

8.2 Rekurentní určení geometrické posloupnosti

$a_{n+1} = 2 \cdot a_n \wedge a_1 = 1, n \in \{1; 2; \dots; 6\}$

$s_{64} = 1 \cdot \frac{2^{64} - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1$

8.3 $\{-1; 5; -7; 17; -31 \dots\}$

8.4 Posloupnost je rostoucí i neklesající, omezená zdola.

8.5 a) aritmetická posloupnost $s_n = \frac{50}{2} (1 + 50) = 1275$

b) geometrická posloupnost $s_n = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{2} \right)^{50} - 1 \right) = 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{50}$

8.6 $a_1 = 2, a_6 = 17, s_6 = 57$

8.7 $q = 2, a_3 = 96$ nebo $q = -2, a_3 = -96$

8.8 24 cm^2

8.9 Za 10 let.

8.10 a) $3/2$ b) -1 c) 0

8.11 a) $s = 2$, b) diverguje, c) $s = 1$

8.12 a) $\{6\}$, b) $\{k\pi \wedge k \in \mathbb{Z}\}$, c) $\left\{ -\frac{\log^2}{\log^3} \right\}$

8.13 a) $\frac{2325}{9900}$, b) $\frac{314}{495}$

8.14 πm^2

Test 8

8.1 a, c, d

8.2 c

8.3 18

8.4 a

8.5 29. den

8.6 1480

8.7 $5/4$

8.8 1

8.9 $4/9$

8.10 32 m^2

Cvičení 9

- 9.1 a) $V_4(6) = 360$; b) $V_4'(6) = 6^4 = 1296$
 9.2 **5**
 9.3 **15!**
 9.4 $C_3(9) = 84$
 9.5 **924**
 9.6 **72,2 %**
 9.7 **5**

- 9.8 a) $K = \{4\}$; b) $K = \{6\}$; c) $K = \{2; 8\}$
 9.9 **260**
 9.10 $\bar{x} = 1,4$, $\text{mod}(x) = 1$
 9.11 **25 %**
 9.12 **48 600 mm²**
 9.13 **86 kg**
 9.14 **$n = 8$**

Test 9

- 9.1 **24**
 9.2 **$2 \cdot 4! = 48$**
 9.3 **10**
 9.4 **$6! = 720$**
 9.5 **24**
 9.6 **2400**

- 9.7 **$n = 12$**
 9.8 **1,765 %**
 9.9 $\bar{x} = 1,5$

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & & 1 & 1 & \\ & 1 & 2 & 1 & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \end{array}$$

 9.10 **$K = \{12\}$**

Cvičení 10

- 10.1 a) **4**; b) **$5/2$** ; c) **$e/2$**
 10.2 a) **-1**; b) **$7/8$** ; c) **16**
 10.3 a) **2**; b) **$1/9$** ; c) **3**
 10.4 a) **$\sqrt{2}/2$** ; b) **1**; c) **$-\sqrt{2}$**
 10.5 a) **$y' = 15x^4 - 4 \wedge x \in \mathbb{R}$**
 b) **$y' = 5\cos x + 2\sin x \wedge x \in \mathbb{R}$**
 c) **$y' = 5x \ln 5 + 4 \cdot e^x \wedge x \in \mathbb{R}$**
 d) **$y' = \frac{5}{x} - \frac{7}{x \ln 10} \wedge x \in \mathbb{R}^+$**
 e) **$y' = 3 \ln x \wedge x \in \mathbb{R}^+$**
 f) **$y' = -\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{3}{\cos^2 x} \wedge x \in \mathbb{R} - \{k \cdot \pi/2\} \wedge k \in \mathbb{Z}$**
 10.6 a) **-1**; b) **4**; c) **-1**
 10.7 **$y = x - \pi/4$**
 10.8 a) minimum v bodě **$x = 0, f(0) = 0$** maximum v bodě **$x = 2, f(2) = -4$**
 b) minimum v bodě **$x = 0, f(0) = 0$**
 10.9 a) roste pro **$x \in (-\infty; -3)$** a **$\langle 1; \infty \rangle$** , klesá pro **$x \in \langle -3; 1 \rangle$**
 b) roste pro **$x \in \langle -3\pi/4 + 2k\pi; \pi/4 + 2k\pi \rangle \wedge k \in \mathbb{Z}$** , klesá pro **$x \in \langle -\pi/4 + 2k\pi; 5\pi/4 + 2k\pi \rangle \wedge k \in \mathbb{Z}$**

- c) roste pro **$x \in (-\infty; -1)$** a **$\langle 1; \infty \rangle$** , klesá pro **$x \in \langle -1; 0 \rangle$** a **$\langle 0; 1 \rangle$**
 d) roste pro **$x \in \langle 0; 2 \rangle$** , klesá pro **$x \in (-\infty; 0)$** a **$\langle 2; \infty \rangle$**
 10.10 a) **$\frac{2}{3} \sqrt{x^3} - 2 \ln x + 15 \sqrt{x} + c \wedge x > 0$**
 b) **$-\frac{3}{2} \ln |1 - x^2| + c \wedge x \in \mathbb{R} - \{\pm 1\}$**
 c) **$-\frac{1}{6} (1 - x)^6 + c \wedge x \in \mathbb{R}$**
 d) **$\frac{\ln^2 x}{2} + c \wedge x > 0$**
 e) **$\frac{x}{3} \sin 3x - \frac{1}{9} \cos 3x + c \wedge x \in \mathbb{R}$**
 f) **$\frac{x - \sin x - \cos x}{2} + c \wedge x \in \mathbb{R}$**
 10.11 **$V = 2 \cdot \pi \int_0^{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{x^3}{2}\right)^2 dx$**

Test 10

- 10.1 **-1/2**
 10.2 **3/4**
 10.3 **-8**
 10.4 **-4/27**
 10.5 **$y = 3x + 11$**

- 10.6 **1**
 10.7 v bodě e lokální maximum **$\left[e; \frac{1}{e}\right]$**
 10.8 **$16 = 8 + 8$**
 10.9 **$\sqrt{2}$**
 10.10 **$\frac{1}{6} (9^2)$**

REJSTŘÍK

A

algoritmus Euklidův 24
alternativa 9
analytická geometrie 116
aproximace 28
asymptota 134
axiom 12, 89

B

binomická rovnice 45
binomický rozvoj 156
bod dotyku 136
bod inflexní 175
bod koncový 118
bod nulový 59
bod počáteční 118
bod samodružný 100
bod vnější 133
bod vnitřní 133

C

cifra 22

Č

část komplexního čísla 28
četnost absolutní 162
četnost relativní 162
číselná soustava 22
čísla celá 25
čísla imaginární 28
čísla iracionální 28
čísla komplexní 28
čísla nesoudělná 25
čísla opačná 26
čísla přirozená 23
čísla racionální 26
čísla reálná 27
čísla složená 24
číslice 22
členy polynomu 34
členy binomického rozvoje 156
čtverec 96, 152
čtyřúhelník 96
čtyřúhelník tečnový 97
čtyřúhelník tětíivový 97

D

definice 13
deltoid 97

derivace funkce 170, 172
dělitelnost 24
diagram kruhový 162
diagram množinový 16
diskriminant 39
doplňěk množiny 16
důkaz matematické věty 14

E

elipsa 130, 133
excentricita 133
exponent 32, 68
extrém globální 174
extrém lokální 173

F

faktoriál 154
funkce exponenciální 63, 64
funkce elementární 169
funkce goniometrické 73, 75, 77
funkce inverzní 55
funkce klesající 172
funkce kvadratická 57
funkce lichá 54
funkce lineární 56
funkce logaritmická 64
funkce lomená 62
funkce mocninná 60
funkce omezená 54
funkce periodické 54
funkce polynomická 56
funkce primitivní 177
funkce prostá 53
funkce racionální 62
funkce rostoucí 172
funkce složená 66
funkce spojitá 55, 172
funkce sudá 54

G

graf funkce 53, 56, 57, 60, 61,
62, 63, 64, 66, 78, 175, 177
goniometrie 71

H

histogram 162
hodnota absolutní 27, 28, 41
hrana 113
hranol 112
hyperbola 134, 139

CH

charakteristiky polohy 163
charakteristiky variability 164

I

identita 100
implikace 8, 13, 14
integrál 177, 180
intervaly 20, 41

J

jednotka 28, 161
jehlan 112, 121
jev jistý 158
jev náhodný 158
jev nemožný 158

K

koeficient algebraického
výrazu 34
koeficient binomický 156
koeficient korelace 165
koeficient variační 164
kolmost 116, 120, 122
kombinace 155
konjunkce 9
konstanta 56, 177
kontradikce 9
kořen rovnice 37
kosinus 73, 75, 79
kosinusoida 77
kosočtverec 97
kosodélník 97
kotangens 73, 75, 79
koule 114, 142, 181
kruh 131, 139
kružnice 106, 131
krychle 111, 112
kužel 113, 182
kuželosečky 13, 131, 133, 134,
136, 139
kvádr 112
kvantifikátor 10
kvocient 146

L

lichoběžník 97
limita 148, 168
logaritmus 64, 170

M

maximum
medián 163, 165
mez integrálu 180
mezikruží 99
minimum 56, 57, 60, 173
míra oblouková 71
míra stupňová 71
mnohostěn 111
mnohoúhelník 98
množina 15, 17, 20, 23
mocněnec 32
mocnina 32
mocnitel 32
modus 164, 165

N

násobek 25
negace 8, 9, 11
nerovnice 47
nerovnost 47

O

obdélník 96
oblouk 99
obor definiční 53, 56, 57, 60, 61, 63, 65, 174
obor hodnot 53, 56, 57, 60, 61, 63, 65, 174
obory číselné 23
obraz 100
obsah 92, 95, 97, 98, 99, 100, 180, 182
obvod 92, 97, 98, 99, 100
odchylka 109, 121, 124, 130
odmocnina 32
odvěsna 73
ohnisko 133, 134, 136
okolí bodu 168
osa 102, 133, 134, 163
otočení 10

P

parabola 57, 136, 139
parametr 43, 122, 127, 136
perioda 27
permutace 154
planimetrie 89
plášť 112
plocha kulová 113
podobnost 104

poloměr 99, 113
posloupnost 145
posloupnost aritmetická 146
posloupnost geometrická 146
posunutí 100, 102
povrch tělesa 112
pravděpodobnost 158
průběh funkce 174
průnik 17
prvočíslo 24
přepona 73, 94
přímka 89, 122, 126

R

radián 71
rameno 72
rovina 89, 116, 127, 128
rovnice 32, 37, 53, 58, 66, 82
rovnoběžník 96
rozptyl 164
rozvoj binomický 156
různoběžky 118, 124

Ř

řada aritmetická 150
řada divergentní 150
řada harmonická 150
řada konvergentní 150
řada nekonvergentní 150

S

sečna 100
shodnost 100
sinus 73, 75
sinusoida 76, 77
sjednocení množin ?
směrnice přímky 122
soubor statistický 162
součin skalární 120
součin vektorový 120
souladnost osová 102
souladnost středová 101
souřadnice bodu 122
souřadnice vektoru 120
soustava souřadnic 116
statistika 162
stejnolehlost 105
střed 92, 131, 133, 134
stupeň 71

T

tangens 73, 75
tangentoidea 77
tautologie 9
tětiva 99
těžiště trojúhelníku 92, 119
trigonometrie 84
trojúhelník 84, 92, 108

U

úhel 90, 91, 92
úhlopříčka 112
úměrnost 56, 62
úseč 114
úsečka 122
usměrňování zlomků 34
útvár 99

V

válec 115
variacie 154
vektor 118, 119, 120
věta 12, 13
vrchlík kulový 114
výrok jednoduchý 8
výrok kvantifikovaný 10
výrok složený 8
vzorec Heronův 93

Z

základ logaritmu 64
znak statistický 161
zobrazení 100, 104

SEZNAM LITERATURY

- [1] Bartsch, H. J.: Matematické vzorce. Praha, SNTL 1983
- [2] Benda, P. a kol.: Sbírka maturitních příkladů z matematiky. Praha, SNP 1986
- [3] Boček, L. a kol.: Matematika pro gymnázia – Rovnice a nerovnice. Praha, Prometheus 1995
- [4] Bušek, I.: Řešení maturitní úlohy z matematiky. Praha, SPN 1988
- [5] Calda, E. a kol.: Matematika pro gymnázia – Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika. Praha, Prometheus 1994
- [6] Dlouhý, Z.: Úvod do matematické analýzy. Praha, SPN 1965
- [7] Houska, J. a kol.: Cvičení z matematiky pro I. A II. ročník gymnázií. Praha, SPN 1985
- [8] Hrubý, D. a kol.: Matematika pro gymnázia – Diferenciální a integrální počet. Praha, Prometheus 1997
- [9] Kubát, J.: Sbírka úloh z matematiky pro přípravu k maturitní zkoušce a k přijímacím zkouškám na vysoké školy. Praha, Victoria Publishing, a. s. 1993
- [10] Mikulčák, J. a kol.: Matematické, fyzikální a chemické tabulky pro střední školy. Praha, SPN 1988
- [11] Odvárko, O.: Matematika pro gymnázia - Posloupnosti a řady. Praha, Prometheus 1995
- [12] Polák, J.: Přehled středoškolské matematiky. Praha, SPN 1983
- [13] Petáková, J.: Matematika, příprava k maturitě a přijímacím zkouškám na vysoké školy. Praha, Prometheus 1998
- [14] Pomykalová, E.: Matematika pro gymnázia - Planimetrie. Praha, Prometheus 1993
- [15] Pomykalová, E.: Matematika pro gymnázia - Stereometrie. Praha, Prometheus 1995
- [16] Rosická, M, Eliášová, L.: Opakování elementární matematiky. Příprava k přijímací zkoušce. Praha, VŠE 1994
- [17] Šindelář, J. a kol.: Sbírka úloh z matematiky pro gymnázia. Praha, SPN 1969
- [18] Škrášek, J., Tichý, Z.: Základy aplikované matematiky I. Praha, SNTL 1986
- [19] Vejšada, F. a kol.: Sbírka úloh z matematiky pro gymnázia. Praha, SPN 1969
- [20] Vošický, Z.: Matematika v kostce. Havlíčkův Brod, Fragment 2004
- [21] Vyšín, J. a kol.: Úlohy z matematiky pro IV. ročník gymnázií. Praha, SPN 1978
- [22] Zedek, M. a kol.: Matematika pro I. ročník středních všeobecně vzdělávacích škol. Praha, SPN 1964